Topologia - Notas de Aula
Segundo Semestre de 2005

Alexandre N. Carvalho

31 de agosto de 2005

1 Topologias

Seja X é um conjunto não vazio. Uma topologia em X é uma família $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X com as seguintes propriedades

i) $\emptyset$ e $X \in \mathcal{T}$,

ii) $\mathcal{T}$ é fechada por interseções finitas e

iii) $\mathcal{T}$ é fechada por uniões arbitrárias.

Os elementos de $\mathcal{T}$ são chamados abertos de X. O espaço X dotado de uma topologia $\mathcal{T}$ é chamado um espaço topológico e é denotado por $(X, \mathcal{T})$ ou simplesmente X quando estiver claro qual a topologia envolvida.

Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Um subconjunto de X é dito fechado se o seu complementar é aberto. É fácil ver que a família dos subconjuntos fechados de X é fechada por uniões finitas e por interseções quaisquer. O interior A^o de um subconjunto A de X é o maior aberto contido em A e o fecho A^- de A é o menor fechado que contém A.

Se X é um conjunto não vazio e $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ são topologias em X, diremos que $\mathcal{T}_2$ é mais fina que $\mathcal{T}_1$ se $\mathcal{T}_2 \supset \mathcal{T}_1$.

2 Bases e Sub-Bases

Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{E} \subset 2^X$, a topologia menos fina que contém $\mathcal{E}$ é chamada a *topologia gerada por* $\mathcal{E}$ e é denotada por $\mathcal{T}(\mathcal{E})$. Esta topologia é a interseção de todas as topologias que contém $\mathcal{E}$. Neste caso, nos referimos a $\mathcal{E}$ como uma sub-base para $\mathcal{T}(\mathcal{E})$.

No que se segue vamos caracterizar a topologia $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ em termos dos elementos de $\mathcal{E}$.

Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico e $x \in X$, uma *base de vizinhanças de* x é uma família $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{T}$ tal que, se $x \in U \in \mathcal{T}$ então, existe $U_x \in \mathcal{N}_x$ tal que $x \in U_x \subset U$. Uma *base* para $\mathcal{T}$ é uma família $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ tal que, $\mathcal{N}$ é uma base de vizinhanças para cada $x \in X$. A prova do seguinte resultado é elementar

Proposição 2.1. *Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico e $\mathcal{E} \subset \mathcal{T}$, então $\mathcal{E}$ é uma base para $\mathcal{T}$ se, e somente se, todo $U \in \mathcal{T}$ é união de conjuntos em $\mathcal{E}$ ($\emptyset$ é união vazia de elementos de $\mathcal{E}$).*

Proposição 2.2. *Se $\mathcal{E} \subset 2^X$, então $\mathcal{E}$ é uma base para uma topologia se e, somente se, as seguintes condições se verificam*

a) cada $x \in X$ pertence a algum $V \in \mathcal{E}$, e

b) se $U, V \in \mathcal{E}$ e $x \in U \cap V$ existe $W \in \mathcal{E}$ com $x \in W \subset U \cap V$.

Prova: É óbvio que se $\mathcal{E}$ é uma base então a) e b) estão satisfeitas. Se por outro lado a) e b) estão satisfeitas, tomamos $\mathcal{T}$ a família obtida tomando uniões quaisquer de elementos de $\mathcal{E}$ ($\emptyset$ é a união vazia de elementos de $\mathcal{E}$). Claramente $X \in \mathcal{T}$ e $\mathcal{T}$ é fechada por uniões quaisquer. Se $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ e $x \in U_1 \cap U_2$ então existem V_1, V_2 em $\mathcal{E}$ com $x \in V_1 \subset U_1$ e $x \in V_2 \subset U_2$. Segue de b) que existe $W \in \mathcal{E}$ com $x \in W \subset V_1 \cap V_2 \subset U_1 \cap U_2$. Isto mostra que $U_1 \cap U_2$ é união de elementos de $\mathcal{E}$ e conclui a demonstração. $\square$

Se $\mathcal{E} \subset 2^X$, a próxima proposição caracteriza os abertos de $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ em termos dos elementos de $\mathcal{E}$.

Proposição 2.3. *Se $\mathcal{E} \subset 2^X$, $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ consiste de $\emptyset, X$ e das uniões quaisquer de interseções finitas de elementos de $\mathcal{E}$.*

Prova: É fácil ver que a família constituída pelas interseções finitas de elementos de $\mathcal{E}$ e X satisfaz as condições da Proposição 2.2. Segue da Proposição 2.1 que a família das uniões quaisquer de tais conjuntos é uma topologia que claramente está contida em $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ e portanto é igual a $\mathcal{T}(\mathcal{E})$. $\square$

3 Topologia induzida por uma família de funções

Estaremos interessados na topologia induzida por uma família de funções que passamos a descrever. Seja X um conjunto qualquer e $\varphi_i : X \to \mathbb{K}$, $i \in I$, uma família de funções.

Observação: Mais geralmente, poderíamos considerar funções ϕ_i tomando valores em espaços topológios $(X_i, \mathcal{T}_i)$ em lugar de $\mathbb{K}$. As provas apresentadas a seguir são para o caso em que

$(X_i, \mathcal{T}_i)$ é $\mathbb{K}$ mas são essencialmente as mesmas no caso geral. A razão para consideramos a imagem das φ_i fixa e igual à $\mathbb{K}$ está no fato que é desta forma que estes resultados de topologia geral se aplicam à análise funcional que será desenvolvida a seguir.

Problema: Dotar X da topologia menos fina que torna todas as funções $\varphi_i : X \to \mathbb{K}$, $\forall\ i \in I$, contínuas.

É claro que a topologia discreta 2^X torna $\varphi_i : X \to \mathbb{K}$ é contínua $\forall\ i \in I$. Também é claro que esta topologia não é a mais econômica (com o menor número de abertos) na verdade ela é a menos econômica.

Se θ é um aberto de $\mathbb{K}$, então se cada φ_i, $i \in I$, é contínua, devemos ter que $\varphi_i^{-1}(\theta)$ é aberto. Desta forma a topologia menos fina que torna φ_i contínua, $\forall i \in I$, deve ser a menor topologia que contém

$$\mathcal{E} := \{\varphi_i^{-1}(\theta) \in 2^X :\ i \in I \text{ e } \theta \text{ é um aberto de } K\}.$$

A menor topologia que contém $\mathcal{E}$ é chamada a *topologia induzida pela família de funções* $\{\varphi_i : i \in I\}$.

Proposição 3.1. *Seja X um conjunto e $\mathcal{T}$ a topologia em X induzida pela família de funções $\varphi_i : X \to \mathbb{K}$, $i \in I$. Se $\{x_n\}$ é uma seqüência em X, então $\{x_n\}$ converge para x (ou abreviadamente $x_n \to x$ se, e somente se, $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$ $\forall\ i \in I$.*

Prova: Se $x_n \to x$, então $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$, $\forall\ i \in I$, já que cada φ_i é contínua.
Reciprocamente, suponha que $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$, $\forall i \in I$. Mostremos que $x_n \to x$. Seja U uma vizinhança de x. Seja $J \subset I$ finito e V_j, $j \in J$, abertos de $\mathbb{K}$ tais que $x \in \cap_J \varphi_j^{-1}(V_j) \subset U$. Para cada $j \in J$, $\exists\ N_j \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_j(x_n) \in V_j$ para $n \geq N_i$. Se $N = \max\{N_j : j \in J\}$ segue que $x_n \in \varphi_j^{-1}(V_j)$, $\forall j \in J$ e portanto $x_n \in U$, $\forall n \geq N$ e portanto $x_n \to x$. $\square$

Proposição 3.2. *Seja X um conjunto e $\mathcal{T}$ a topologia em X induzida pela família de funções $\varphi_i : X \to \mathbb{K}$, $i \in I$. Se (Z, Σ) é um espaço topológico e $\psi : Z \to X$ é uma função então, ψ é contínua se, e somente se, $\varphi_i \circ \psi$ é contínua de Z em $\mathbb{K}$, $\forall i \in I$.*

Prova: Se ψ é contínua, então $\varphi_i \circ \psi$ é também contínua, para cada $i \in I$, como composta de funções contínuas. Inversamente, se $\varphi_i \circ \psi$ é contínua, para cada $i \in I$, seja $U \in \mathcal{T}$ e mostremos que $\psi^{-1}(U) \in \Sigma$. Sabemos que

$$U = \bigcup_{\text{qualquer}} \bigcap_{\text{finita}} \varphi_i^{-1}(V_i), \quad V_i \text{ aberto em } \mathbb{K}.$$

Logo

$$\psi^{-1}(U) = \bigcup_{\text{qualquer}} \bigcap_{\text{finita}} \psi^{-1}(\varphi_i^{-1}(V_i)) = \bigcup_{\text{qualquer}} \bigcap_{\text{finita}} (\varphi_i \circ \psi)^{-1}(V_i).$$

Como $\varphi_i \circ \psi$ é contínua, temos que $(\varphi_i \circ \psi)^{-1}(V_i) \in \Sigma$ e portanto $\psi^{-1}(U) \in \Sigma$. Segue que $\psi : (Z, \Sigma) \to (X, \mathcal{T})$ é contínua. □

4 Produto Carteziano

Seja A um conjunto e uma família de conjuntos. O produto carteziano da família de conjuntos $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é o conjunto

$$X := \{f : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha : f(\alpha) \in X_\alpha, \quad \forall \alpha \in A\}.$$

Denotaremos este conjunto por $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ ou por X^A quando todos os conjuntos forem idênticos.

Exemplo 4.1.

- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *é o conjunto das funções reais com valores reais.*
- $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *é o conjunto das seqüências de números complexos.*

Um elemento de $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ é denotado por $w = (w_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Se cada X_α é dotado de uma topologia $\mathcal{T}_\alpha$, $\alpha \in A$, podemos colocar em X a topologia induzida pela família de aplicações $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ definida por

$$w \stackrel{\varphi_\alpha}{\longmapsto} w_\alpha \quad \text{(as projeções sobre cada } X_\alpha\text{)}.$$

Esta topologia é denominada *topologia produto* e é denotada por $\prod_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$.

5 O Teorema de Tychonoff

Uma família de conjuntos $\mathcal{C} = \{C_\lambda \in 2^X : \lambda \in \Lambda\}$ é dita uma cobertura de $A \subset X$ se $A \subset \cup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ (diremos que $\mathcal{C}$ cobre A) e qualquer subconjunto de $\mathcal{C}$ que ainda cobre A é chamado uma subcobertura e se todos os conjuntos C_λ são abertos diremos que $\mathcal{C}$ é uma cobertura aberta. Um subconjunto K de X é compacto se toda cobertura aberta de K possui subcobertura finita.

Em espaços de dimensão finita, compactos são abundantes e caracterizados de forma bastante simples. Infelizmente, este não é o caso em espaços de dimensão infinita. Qualquer resultado que caracterize esses compactos é extremamente útil já que compactos desempenham um papel fundamental em análise. Quase todos os resultados que caracterizam os compactos em espaços de dimensão infinita são obtidos dos Teoremas de Tychonoff e do Teorema de Arzelá-Ascoli. Em particular, a introdução das topologias fraca e fraca* com o objetivo de aumentar o número de compactos nos espaços vetoriais normados de dimensão infinita estudados se inspira no teorema de Tychonoff que demonstramos a seguir.

Teorema 5.1 (de Tychonoff)**.** *Se X_α, $\alpha \in A$ são espaços topológicos compactos, então $(X, \mathcal{T}) := \left(\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha, \prod\limits_{\alpha\in A} \mathcal{T}_\alpha\right)$ é compacto.*

Prova: Para mostrar que $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico compacto, mostraremos que, se $\mathcal{F} \subset 2^X$ tem a propriedade da interseção finita, então $\bigcap\{\overline{F} : \overline{F} \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$.

Seja Λ a família de todas as $\mathcal{F} \subset 2^X$ com a propriedade da interseção finita. Se Λ é ordenada pela inclusão então toda cadeia em Λ tem um limitante superior (a união). Pelo lema de Zorn toda $\mathcal{F} \subset 2^X$ com a propriedade da interseção finita está contida em uma coleção maximal com a propriedade da interseção finita. Logo, basta provar que, se $\mathcal{F} \in \Lambda$ é maximal então, $\bigcap\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$.

Para cada $F \in \mathcal{F}$ e $\beta \in A$ seja F_β a projeção de F em X_β; isto é, $F_\beta = \{w_\beta : w = (w_\alpha)_{\alpha\in A} \in F\}$. Então a coleção $\mathcal{F}_\beta = \{F_\beta : F \in \mathcal{F}\}$ tem a propriedade da interseção finita. Como X_β é compacto existe $x_\beta \in \cap\{\overline{F}_\beta : F_\beta \in \mathcal{F}_\beta\}$. Seja $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in X$ tal que, $\forall \alpha \in A$, $x_\alpha \in \bigcap\{\overline{F}_\alpha : F_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha\}$. Resta apenas mostrar, $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \overline{F}$. Para isto, dado $\beta \in A$, seja G_β um aberto de X_β com $x_\beta \in G_\beta$. Então, se $G = \{(y_\alpha)_{\alpha\in A} : y_\beta \in G_\beta\}$, a união da família $\mathcal{F}$ com $\{G\}$ continua a ter a propriedade da interseção finita. Como $\mathcal{F}$ é maximal $G \in \mathcal{F}$. Além disso, toda interseção finita de tais G também pertence a $\mathcal{F}$. Mas estas interseções finitas formam uma base de vizinhanças de $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ na topologia de X. Isto implica que qualquer $F \in \mathcal{F}$ encontra todo aberto de X que contém $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$. Logo,

$$(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \overline{F},\ \forall F \in \mathcal{F}$$

e, consequentemente,

$$(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}.$$

$\square$