$3^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de SMA-332- Cálculo II

1. Desenhe a imagem:

   a) $F(t) = (1, t)$

   b) $F(t) = (2t - 1, t + 2)$

   c) $F(t) = (t, t^3)$

   d) $F(t) = (t^2, t)$

   e) $F(t) = (t^2, t^4)$

   f) $F(t) = (cost, 2sent)$

   g) $F(t) = (sent, sent)$

   h) $F(t) = (sent, sen^2 t)$

   i) $F(t) = (e^t cost, e^t sent),\ t \geq 0$

2. Desenhe a imagem:

   a) $F(t) = (1, t, 1),\ t \in \mathbb{R}$

   b) $F(t) = (1, 1, t),\ t \geq 0$

   c) $F(t) = (t, t, 1),\ t \geq 0$

   d) $F(t) = (cost, sent, 2)$

   e) $F(t) = (t, t, 1 + sent),\ t \geq 0$

   f) $F(t) = \left(1, 1, \dfrac{1}{t}\right),\ t > 0$

   g) $F(t) = (cost, sent, e^{-t}),\ t \geq 0$

   h) $F(t) = (1 + sent, 1 + sent, cost),\ -\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$

3. Sejam $\overrightarrow{F}$(t)=(t, sent, 2) e $\overrightarrow{G}$(t)=(3, t, t^2). Calcule:

   a) $\overrightarrow{F}(t) \bullet \overrightarrow{G}(t)$

   b) $e^{-t}.\overrightarrow{F}(t)$

   c) $\overrightarrow{F}(t) - 2\overrightarrow{G}(t)$

   d) $\overrightarrow{F}(t) \times \overrightarrow{G}(t)$

4. Calcule $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$, onde $\overrightarrow{u}(t) = sent\,\overrightarrow{i} + cost\,\overrightarrow{j} + t\,\overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{v}(t) = sent\,\overrightarrow{i} + cost\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

5. Calcule $\lim_{t \to t_o} \overrightarrow{F}(t)$, onde:

   a) $\overrightarrow{F}(t) = \left(\dfrac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}, t^2, \dfrac{t - 1}{t}\right)$ e $t_o = 1$

   b) $\overrightarrow{F}(t) = \left(\dfrac{tag3t}{t}, \dfrac{e^{2t} - 1}{t}, t^3\right)$ e $t_o = 0$

   c) $\overrightarrow{F}(t) = \left(\dfrac{t^3 - 8}{t^2 - 4}, \dfrac{cos\left(\dfrac{\pi}{t}\right)}{t - 2}, 2t\right)$ e $t_o = 1$

6. Calcule $\dfrac{d\overrightarrow{F}}{dt}$ e $\dfrac{d^2\overrightarrow{F}}{dt^2}$:

   a) $\overrightarrow{F}(t) = (3t^2, e^{-t}, ln(t^2+1))$

   b) $\overrightarrow{F}(t) = \sqrt[3]{t^2}\ \overrightarrow{i} + cost^2\overrightarrow{j} + 3t\overrightarrow{k}$

   c) $\overrightarrow{F}(t) = sen5t\ \overrightarrow{i} + cos4t\ \overrightarrow{j} - e^{-2t}\overrightarrow{k}$

7. Calcule:

   a) $\int_0^1\ [t\ \overrightarrow{i} + e^t\ \overrightarrow{t}]dt$

   b) $\int_{-1}^1 \left[sen3t\ \overrightarrow{i} + \dfrac{1}{1+t^2}\ \overrightarrow{t} + \overrightarrow{k}\right] dt$

   c) $\int_1^2 [3\ \overrightarrow{i} + 2\ \overrightarrow{t} + \overrightarrow{k}]dt$

8. Sejam $\overrightarrow{F}(t) = t\ \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + e^t\ \overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{G}(t) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. Calcule:

   a) $\int_0^1 [\overrightarrow{F}(t) \times \overrightarrow{G}(t)]dt$

   b) $\int_0^1 [\overrightarrow{F}(t) \bullet \overrightarrow{G}(t)]dt$

9. Calcule o comprimento da curva dada, e verifique quais delas são regulares:

   a) $\gamma(t) = (tcost, tsent),\ t \in [0, 2\pi]$

   b) $\gamma(t) = (2t-1, t+1),\ t \in [1, 2]$

   c) $\gamma(t) = (cost, sent, e^{-t}),\ t \in [0, \pi]$

   d) $\gamma(t) = (e^{-t}cost, e^{-t}sent, e^{-t}),\ t \in [0, 1]$

   e) $\gamma(t) = (t, lnt),\ t \in [1, e]$

10. Seja F dada por $F(t) = (lnt, t, \sqrt{1-t^2}, t^2)$.

    a) Determine o domínio de F.

    b) Calcule $F\left(\dfrac{3}{5}\right)$

11. Sejam $\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{H}$ três funções definidas em $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ e a valores em $\mathbb{R}^3$. Verifique que:

    a)$\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G} = -\overrightarrow{G} \times \overrightarrow{F}$

    b)$\overrightarrow{F} \bullet (\overrightarrow{G} + \overrightarrow{H}) = \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{G} + \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{H}$

12. Sejam $\overrightarrow{F} : \mathbb{A} \to \mathbb{R}^3$ e $\overrightarrow{G} : \mathbb{A} \to \mathbb{R}^3$ Suponha $\lim_{t \to t_o} \overrightarrow{F}(t) = \overrightarrow{0}$ e que $\|\overrightarrow{G}(t)\| \leq M$ para todo $t \in \mathbb{A}$, onde $M > 0$ é um real fixo. Prove que:

    a) $\lim_{t \to t_o} \overrightarrow{F}(t) \bullet \overrightarrow{G}(t) = 0$

    b) $\lim_{t \to t_o} \overrightarrow{F}(t) \times \overrightarrow{G}(t) = \overrightarrow{0}$

13. Seja $\overrightarrow{F} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ contínua. Prove que existe $M > 0$ tal que $\| \overrightarrow{F}(t) \| \leq M$ em $[a, b]$.

14. Seja $\overrightarrow{F} : I \to \mathbb{R}^3$, I intervalo, derivável até a segunda ordem em I. Suponha que exista um número real λ tal que, para todo t em I, $\dfrac{d^2\overrightarrow{F}(t)}{dt^2} = \lambda\overrightarrow{F}(t)$. Prove que $\overrightarrow{F}(t) \times \dfrac{d\overrightarrow{F}(t)}{dt}$ é constante em I.

15. Seja $\overrightarrow{r}$ definida em $\mathbb{R}$, com valores em $\mathbb{R}^3$, e derivável até a segunda ordem. Prove que se $\overrightarrow{r}(t) \times \dfrac{d\overrightarrow{r}(t)}{dt}$ for constante em $\mathbb{R}$, então $\overrightarrow{r}(t) \times \dfrac{d^2\overrightarrow{r}(t)}{dt^2} = \overrightarrow{0}$ em $\mathbb{R}$.

16. Seja $\overrightarrow{F}(t)$ uma força, dependendo do tempo t, que atua sobre uma partícula entre os instantes t_1 e t_2. Supondo $\overrightarrow{F}$ integrável em $[t_1, t_2]$, o vetor $\overrightarrow{I} = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F}(t)dt$ denomina-se impulso de $\overrightarrow{F}$ no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$. Calcule o impulso de $\overrightarrow{F}$ no intervalo de tempo dado.

    a) $\overrightarrow{F}(t) = t\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + t^2\overrightarrow{k}, t_1 = 0$ e $t_2 = 2$

    b) $\overrightarrow{F}(t) = cos3t\,\overrightarrow{i} + e^t cost\,\overrightarrow{j} + lnt\,\overrightarrow{k}, t_1 = 0$ e $t_2 = 2\pi$

17. Dê exemplos de curvas γ e δ tais que $Im\gamma = Im\delta$, mas que seus comprimentos de curvas sejam diferentes.

18. Dizemos que uma curva $\delta : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$, com derivada contínua, está parametrizada pelo comprimento de arco se $\| \delta'(s) \| = 1$, para todo $s \in [\alpha, \beta]$. Verifique que cada uma das curvas abaixo está parametrizada pelo comprimento de arco. Interprete o parâmetro s.

    a) $\delta(s) = (cos(s), sen(s)),\ s \geq 0$

    b) $\delta(s) = \left(Rcos(\frac{s}{R}), Rsen(\frac{s}{R})\right),\ s \geq 0$, onde $R > 0$ é um real fixo

    c) $\delta(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{5}}, \frac{2s}{\sqrt{5}}\right),\ s \geq 0$