$5^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de SMA-332- Cálculo II

1. Determine as derivadas parciais da função dada em todos os pontos do seu domínio:

   a) $f(x, y) = 5x^4y^2 + xy^3 + 4$

   b) $f(x, y) = \cos xy$

   c) $f(x, y) = \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

   d) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$

   e) $f(x, y) = x^2 \ln(1 + x^2 + y^2)$

   f) $f(x, y) = xye^{xy}$

   g) $f(x, y) = (4xy - 3y^3)^3 + 5x^2y$

   h) $f(x, y) = arctg\frac{x}{y}$

   i) $f(x, y) = x^y$

   j) $f(x, y) = (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$

   l) $f(x, y) = \dfrac{x \sin y}{\cos(x^2 + y^2)}$

2. Considere a função $z = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$. Verifique que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

3. Seja $\phi : R \to R$ uma função de uma variável real, diferenciável e tal que $\phi'(1) = 4$. Seja $g(x, y) = \phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Calcule:

   a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 1)$

   b) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 1)$

4. Seja $g(x, y) = \phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ a função do exercício anterior. Verifique que

$$x\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$$

   para todo $(x, y) \in R^2$, com $y \neq 0$.

5. Considere a função dada por $z = x \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Verifique que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

6. A função $p = p(V, T)$ é dada implicitamente pela equação $pV = nRT$ onde n e R são constantes não nulas. Calcule $\dfrac{\partial p}{\partial V}$ e $\dfrac{\partial p}{\partial T}$.

7. Seja $z = e^y\phi(x - y)$, onde ϕ é uma função de uma variável real. Mostre que:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

8. Seja $\phi : R \to R$ uma função diferenciável de uma variável real e seja $f(x,y) = (x^2+y^2)\phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Mostre que
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f$$

9. Calcule as derivadas parciais de $2^{\underline{a}}$ ordem:

   a) $f(x,y) = x^3y^2$

   b) $z = e^{x^2-y^2}$

   c) $z = ln(1+x^2+y^2)$

   d) $g(x,y) = 4x^3y^4 + y^3$

10. Seja $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$. Verifique que:

    a) $x\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + y\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -3\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.

    b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{4}{(x^2+y^2)^2}$.

11. Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, onde $f(x,y) = ln(1+x^2+y^2)$.

12. Verifique que $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, onde $z = (x+y)e^{\frac{x}{y}}$.

13. Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, duas funções de classe C^2 e tais que $(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$. Verifique que:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$$
    Prove que
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$

14. Seja $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 no aberto A. Justifique as igualdades:

    a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

    b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$

    c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$

15. Seja $f(x,y,z) =: \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Verifique que
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

    b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$

    c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$

16. Seja $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

17. Seja $z = xye^{\frac{x}{y}}$. Verifique que

$$x\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + y\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = 0$$