$6^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de SMA-332- Cálculo II

1. Mostre que as funções dadas são diferenciáveis.

   a) $f(x, y) = xy$

   b) $f(x, y) = x + y$

   c) $f(x, y) = x^2y^2$

   d) $f(x, y) = \dfrac{1}{xy}$

   e) $f(x, y) = \dfrac{1}{x + y}$

   f) $f(x, y) = x^2 + y^2$

2. f é diferenciável em (0,0)? Justifique.

   a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$.

   b) $f(x, y) = \dfrac{x^2y}{x^2 + y^2}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$.

   c) $f(x, y) = \dfrac{x^4}{x^2 + y^2}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$.

3. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função dada, no ponto dado.

   a) $f(x, y) = 2x^2y$ em $(1, 1, f(1, 1))$

   b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ em $(0, 1, f(0, 1))$

   c) $f(x, y) = 3x^3y - xy$ em $(1, -1, f(1, -1))$

   d) $f(x, y) = xe^{x^2-y^2}$ em $(2, 2, f(2, 2))$

   e) $f(x, y) = \text{arctg } (x - 2y)$ em $(2, \frac{1}{2}, f(2, \frac{1}{2}))$

   f) $f(x, y) = xy$ em $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$

4. Determine o plano que passa pelos pontos $(1, 2, 2)$ e $(-1, 1, 1)$ e que seja tangente ao gráfico de $f(x, y) = xy$.

5. $z = 2x + y$ é a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x, y)$ no ponto $(1, 1, 3)$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$.

6. $2x + y + 3z = 6$ é a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x, y)$ no ponto $(1, 1, 1)$.

   a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$.

   b) Determine a equação da reta normal no ponto $(1, 1, 1)$.

7. Determine o plano que seja paralelo ao plano $z = 2x + 3y$ e tangente ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + xy$.

8. Determine os planos que sejam tangentes ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$ e que contenham a intersecção dos planos $x + y + z = 3$ e $z = 0$.

9. Considere a função $f(x, y) = xg(x^2 + y^2)$, onde $g(u)$ é uma função derivável de uma variável. Mostre que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, a, f(a, a))$ passa pela origem.

10. A função $z = z(x, y)$ tangentes é diferenciável e dada implicitamente pela equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Mostre que $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$ é a equação do plano tangente no ponto (x_0, y_0, z_0), $z_0 \neq 0$.

11. Seja $z = f(x, y)$ diferenciável em (x_0, y_0). Seja S a função afim dada por $S(x, y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c$. Suponha que

$$f(x, y) = S(x, y) + E(x, y)$$

com

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E(x, y)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0.$$

Conclua que $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ e $c = f(x_0, y_0)$.

12. Verifique que as funções dadas são diferenciáveis.

a) $f(x, y) = e^{x-y^2}$

b) $f(x, y) = x^2 y$

c) $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$

d) $f(x, y) = x^4 + y^3$

e) $f(x, y) = x \cos(x^2 + y^2)$

f) $f(x, y) = \operatorname{arctg} xy$

13. Determine o conjunto dos pontos em que a função dada é diferenciável. Justifique.

a) $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$.

b) $f(x, y) = \frac{x^y}{x^2 + y^2}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$.

c) $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$.

d) $f(x, y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}$, se $x^2 + y^2 > 1$ e $f(x, y) = 0$, se $x^2 + y^2 \leq 1$.

14. Calcule a diferencial.

a) $z = x^3 y^2$

b) $z = x$ arctg $(x + 2y)$

c) $z =$ sen xy

d) $u = e^{s^2 - t^2}$

e) $t = \ln(1 + p^2 + v^2)$

f) $x =$ arcsen uv

15. Seja $z = \sqrt{x} + y^{\frac{1}{3}}$.

a) Calcule a diferencial de z no ponto $(1, 8)$.

b) Calcule um valor aproximado para z, correspondente a $x = 1,01$ e $y = 7,9$.

c) Calcule um valor aproximado para a variação $\triangle z$ em z, quando se passa de $x = 1$ e $y = 8$ para $x = 0,9$ e $y = 8,01$.

16. Calcule um valor aproximado para a variação $\triangle A$ na área de um retângulo quando os lados variam de $x = 2m$ e $y = 3m$ para $x = 2,01m$ e $y = 2,97m$.

17. Uma caixa de forma cilíndrica é feita com um material de espessura $0,03m$. As medidas internas são: altura 2 m e4 raio da base 1 m. A caixa é sem tampa. Calcule um valor aproximado para o volume do material utilizado na caixa.

18. A altura de um cone é $h = 20$ cm e o raio da vase $r = 12$ cm. Calcule um valor aproximado para a variação $\triangle V$ no volume quando h aumenda 2 mm e r decresce 1 mm.

19. Calcule $\nabla f(x,y)$ sendo $f(x,y) =$

    a) $z = x^2 y$

    b) $e^{x^2-y^2}$

    c) $\dfrac{x}{y}$

    d) $\operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$

20. Calcule $f'(x,y)$ sendo $f(x,y) =$

    a) xy

    b) 2^{x-y}

    c) $x\operatorname{tg} \dfrac{x}{y}$

    d) $\operatorname{arcsen} xy$

21. Sejam $f(x,y) = y - x^2$ e $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$.

    a) Verifique que a imagem de γ está contida na curva de nível $y - x^2 = 0$.

    b) Desenhe a imagem de γ.

    c) Verifique que para todo t, $\gamma'(t) \cdot \nabla f(\gamma(t)) = 0$.

22. Considere a função $f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$ e seja $\gamma(t) = (x(t), y(t), y(t))$ uma curva diferenciável qualquer, com imagem contida na superfície de nível $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$, e tal que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$.

    a) Prove que $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \gamma'(t) = 0$.

    b) Determine a equação do plano tangente à superfície de nível dada, no ponto (x_0, y_0, z_0).

    c) Determine a equação do plano tangente à superfície de nível $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 14$, no ponto $(1,1,1)$.

23. Seja $f(x,y) = x^2 - y^2$. Represente geometricamente $\nabla f(x_0, y_0)$, sendo $(x_0, y_0) =$

    a) $(1,1)$

    b) $(-1,1)$

    c) $(-1,-1)$

    d) $(1,-1)$