9ª Lista de Exercícios de SMA-332- Cálculo II

1. Selecione os candidatos extremantes locais, sendo $f(x, y) =$

   a) $2x^2 + y^2 - 2xy + x - y$

   b) $x^2 - y^2 + 3xy - x + y$

   c) $x^3 - y^2 + xy + 5$

   d) $x^3 + y^3 - xy$

   e) $x^4 + y^4 + 4x + 4y$

   f) $x^5 + y^5 - 5x - 5y$

2. Estude com relação a máximos e mínimos locais sa função $f(x, y) =$

   a) $x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$

   b) $x^2 + y^3 + xy - 3x - 4y + 5$

   c) $x^3 + 2xy + y^2 - 5x$

   d) $\sqrt[3]{x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x - 12y}$

   e) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y} + xy,\ x > 0\ \text{ e }\ y > 0$

3. Seja $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + k$, onde a, b, c, d, e, e k são constantes. Prove que se (x_o, y_o) for extremante local de f, então será extremante global.

4. Estude com relação a extremantes globais a função $f(x, y) =$

   a) $x^2 + 2xy + 2y^2 - x + 2y$

   b) $x^2 - y^2 - 3xy + x + 4y$

   c) $x + 2y - 2xy - x^2 - 3y^2$

   d) $x^2 + y^2 - 2x - 4y$

5. Determine o ponto do plano $x + 2y - z = 4$ que se encontra mais próximo da origem.

6. Determinada empresa produz dois produtos cujas quantidades são indicadas por x e y. Tais produtos são oferecidos ao mercado consumidor a preços unitários p_1 e p_2, respectivamente, que dependem de x e y conforme equações: $p_1 = 120 - 2x$ e $p_2 = 200 - y$. O custo total da empresa para produzir e vender quantidades x e y dos produtos é dado por $C = x^2 + 2y^2 + 2xy$. Admitindo que toda produção da empresa seja absorvida pelo mercado, determine a produção que maximiza o lucro.

7. Para produzir determinado produto cujo quantidade é representada por z, uma empresa utiliza dois fatores de produção (insumos) cujas quantidades serão indicadas por x e y. Os preços unitários dos fatores de produção são, respectivamente, 2 e 1. O produto será oferecido ao mercado consumidor a um preço unitário igual a 5. A função de produção da empresa é dada por $z = 900 - x^2 - y^2 + 32x + 41y$. Determine a produção que maximiza o lucro.

8. Determine o ponto do plano $3x + 2y + z = 12$ cuja soma dos quadrados das distâncias a $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$ seja mínima.

9. De todos os paralelepípedos retângulos de volume dado, qual o de área total mínima?

10. Estude com relação a máximos e mínimos locais a função $f(x, y, z) =$

    a) $x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 4xy - 2x - 4y - 8z + 2$

    b) $x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2$

    c) $x^3 + 2xy + y^2 + z^2 - 5x - 4z$

    d) $x^2 - y^2 + 4z^2 + 2xz - 4yz - 2x - 6z$

11. Seja $z = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x + y)$, com x e y arcos do primeiro quadrante. Determine o(s) ponto(s) que maximiza z.

12. Determine a equação do plano que passa pelo ponto $P(1, 2, 1)$ e que determina, com os planos coordenados, o tetraedro de volume mínimo. Determine este volume.

13. Inscreva em um círculo de raio R, o triângulo de área máxima.

14. Estude a função dada com relação a máximo e mínimo no conjunto dado.

    a) $f(x, y) = 3x - y$ no conjunto A de todos (x, y) tais que $x \geq 0,\ y \geq 0,\ y - x \leq 3,\ x + y \leq 4$ e $3x + y \leq 6$.

    b) $f(x, y) = 3x - y$ em $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

    c) $f(x, y) = x^2 + 3xy - 3x$ em $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ e } x + y \leq 1\}$.

    d) $f(x, y) = xy$ em $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ e } 2x + y \leq 5\}$.

    e) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ em $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

15. Determine (x, y), com $x^2 + 4y^2 \leq 1$, que maximiza a soma $2x + y$.

16. Suponha que $T(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ e } 2y + x \leq 4\}$. Determine o ponto de A de menor temperatura.

17. Suponha A um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^2$ e (x_o, y_o)um ponto de acumulação de A. Prove que $(x_o, y_o) \in A$.

18. *(Teorema de Weierstrass)* Seja $A \subset \mathbb{R}^2$, A compacto, e seja $f : A \to \mathbb{R}$ contínua. Prove que f assume em A valor máximo e valor mínimo.

19. Determine a curva de nível de $f(x, y) = x^2 + 16y^2$ que seja tangente à curva $xy = 1,\ x > 0$ e $y > 0$. Qual é o ponto de tangencia?

20. Determine o ponto da reta $x + 2y = 1$ cujo produto das coordenadas seja máxima.

21. Determine o ponto da parábola $y = x^2$ mais próximo de $(14, 1)$

22. Determine a superfície de nível da função $f(x, y, z) = x^2+y^2+2z^2$ que seja tangente ao plano $x+2y+3z = 4$. Qual é o ponto de tangencia?

23. Determine o ponto do plano $x + 2y - 3z = 4$ mais próximo da origem.

24. Pede-se para determinar três números positivos cuja soma seja 36 e cujo produto seja máximo.

25. Deseja-se construir um paralelepípedo-retângulo com área total de $100cm^2$. Determine as dimensões para o volume ser máximo.

26. Considere a forma quadrática $Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ onde $a,\ b,\ c$ são constantes não simultaneamente nulas. Seja $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Suponha que (x_o, y_o, λ_o) seja solução do sistema

$$\begin{cases} \nabla Q(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

    Prove que $Q(x_o, y_o) = \lambda_o$.

27. Sejam $Q(x, y)$ e $g(x, y)$ como no exercício anterior. Suponha que os multiplicadores de Lagrange associados ao problema

$$\begin{cases} \nabla Q(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

    sejam estritamente positivos. Prove que $Q(x, y) > 0$, para todo $(x, y) \neq (0, 0)$.

28. (E.M.B) Resolva o sistema a equação

$$\begin{cases} \cos^n(x + y) - \operatorname{sen}^n(x + y) = 1 \\ x + y = \dfrac{\pi}{40} \ln \sqrt{e^{(\mu/100)\sqrt{2\mu}}} \end{cases}$$

    onde $n \in \mathbb{N}^\star$, e μ é o valor da temperatura máxima T, $T = 100x^2yz$ sobre a esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, onde (x, y, z) é um ponto qualquer do espaço.