$10^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de SMA-332- Cálculo II

1. Calcule a integral iterada.

   a) $\int_1^2 \int_0^{2x} xy^3 dydx$. Resp. 42.

   b) $\int_0^4 \int_0^y dxdy$. Resp. 8.

   c) $\int_0^4 \int_0^y \sqrt{9+y^2}dxdy$. Resp. $\dfrac{98}{3}$.

   d) $\int_{-1}^1 \int_1^{e^x} \dfrac{x}{y}dydx$. Resp. $\dfrac{2}{3}$.

   e) $\int_1^4 \int_{y^2}^y \sqrt{\dfrac{y}{x}}dxdy$. Resp. $-\dfrac{49}{5}$.

   f) $\int_1^4 \int_{x^2}^x \sqrt{\dfrac{y}{x}}dydx$. Resp. $\dfrac{1226}{42}$.

   g) $\int_0^3 \int_0^x x^2e^{xy}dydx$. Resp. -5.

   h) $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^x \operatorname{sen}(4x-y)dydx$. Resp. $\dfrac{1}{3}$.

   i) $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{y^2} \operatorname{sen}\dfrac{x}{y}dxdy$. Resp. $\dfrac{3\pi^2-4\pi-8}{8}$.

2. Ache um valor aproximado da integral dupla:

   a) $\iint\limits_R (3x-2y+1)dA$ onde R é a região retangular com vértices $(0,-2)$ e $(3,0)$. Resp. 45.

   b) $\iint\limits_R (y^2-4x)dA$ onde R é a região retangular com vértices $(-1,0)$ e $(1,3)$. Resp. 6.

   c) $\iint\limits_R (x^2+y)dA$ onde R é a região retangular com vértices $(0,0)$ e $(4,2)$. Resp. $\dfrac{152}{3}$.

   d) $\iint\limits_R senxdA$ onde R é a região limitada pelas retas $y=2x,\ y=\dfrac{x}{2}$ e $x=\pi$. Resp. $\dfrac{3\pi}{2}$.

   e) $\iint\limits_R cos(x+y)dA$ onde R é a região limitada pelas retas $y=x,\ x=\pi$ e o eixo x. Resp. -2.

   f) $\iint\limits_R x^2\sqrt{9-y^2}dA$ onde R é a região limitada pela circunferência $x^2+y^2=9$. Resp. $\dfrac{864}{5}$.

   g) $\iint\limits_R \dfrac{y^2}{x^2}dA$ onde R é a região limitada pelas retas $y=x,\ y=2$ e pela hipérbole $xy=1$. Resp. $\dfrac{9}{4}$.

3. Ache o volume do sólido sob o plano $z=4x$ e acima da circunferência $x^2+y^2=16$ no plano xy. Faça um esboço do sólido. Resp. $\dfrac{512}{3}$.

4. Ache por integração dupla, o volume da parte do sólido limitada pela esfera $x^2+y^2+z^2=16$ que está no primeiro octante. Faça um esboço do sólido. Resp. $\dfrac{32\pi}{3}$

5. Ache o volume do sólido no primeiro octante, limitado pelos cilindros $x^2+y^2=4$ e $x^2+z^2=4$. Faça um esboço do sólido. Resp. $\dfrac{16}{3}$.

6. Encontre o volume do sólido limitado pela superfície $f(x,y)=4-\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}$, pelos planos $x=3,\ y=2$ e pelos três planos coordenados. Resp. $V=21,5$ u.c. (unidade de comprimento).

7. Encontre $\int_0^1 \int_1^2 x^2e^{xy}dydx$. Resp. $\dfrac{e^2-3}{4}$.

8. Encontre a medida do volume do sólido acima do plano xy, limitado pelo parabolóide elíptico $z=x^2+4y^2$ e pelo cilindro $x^2+4y^2=4$. Resp. $V(S)=4\pi\ u.c.$

9. Encontre a área da região limitada pelas curvas $y=-x^2+6x+5$ e $y=x^2-6x+8$. Resp. $A(R)\cong 10.5\ u.a.$

10. Use integrais dupla para encontrar a área da região limitada pelas curvas dadas no plano xy. Faça um esboço da região:

    a) $y = x^3$ e $y = x^2$. Resp. $\frac{1}{12}$.

    b) $y = x^2 - 9$ e $y = 9 - x^2$. Resp. 72.

11. Encontre a integral dupla $\iint\limits_A e^{-x^2-y^2}\, dA$, onde A é a região que está no primeiro quadrante e é limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ e pelos eixos coordenados. Resp. $-\frac{(e^{-a^2} - 1)}{4}\pi$.

12. Calcule por coordenadas polares a integral dupla $\iint\limits_R e^{x^2+y^2}\, dA$, onde R é a região limitada pelas circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$. Resp. $\pi(e^8 - 1)$.

13. Encontre a área da superfície que é cortada do cilindro $x^2 + z^2 = 16$ pelos planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = 3$. Resp. $2\pi u.a.$

14. Calcule a integral dupla $\iint\limits_R \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dA$, onde R é a região no primeiro quadrante, limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$ e pelos eixos coordenados. Resp. $\frac{1}{2}$.

15. Ache a área da superfície delimitada no plano $2x + y + z = 4$ pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$. Resp. $\sqrt{6}$.

16. Encontre a área do parabolóide $z = x^2 + y^2$ abaixo do plano $z = 4$.

17. Calcule a integral iterada.

    a) $\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 xdzdydx$. Resp. 3.

    b) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x+y} (x + y + z)dzdydx$. Resp. $\frac{7}{8}$.

    c) $\int_{-1}^0 \int_e^{2e} \int_0^{\pi/3} y(lnz)(tgx)dxdzdy$. Resp. $-e(ln2)^2$.

    d) $\int_0^{\pi/2} \int_z^{\pi/2} \int_0^{xz} cos\left(\frac{y}{z}\right) dydxdz$. Resp. $\frac{\pi}{2} - 1$.

18. Calcule:

    a) $\iiint\limits_S z\, dV$, se S for a região limitada pelo tetraedro com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ e $(1, 0, 1)$. Resp. $\frac{1}{24}$.

    b) $\iiint\limits_S xy\, dV$, se S for o paralelepípedo no primeiro octante, limitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = 2$, $y = 3$ e $z = 4$. Resp. 36.

19. Encontre o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 25$, pelo plano $x + y + z = 8$ e pelo plano xy. Resp. $500 + 10\pi$.

20. Encontre o $rotF$, se F for o campo vetorial definido por $F(x, y, z) = e^{2x}\overrightarrow{i} + 3x^2yz\overrightarrow{j} + (2y^2z + x)\overrightarrow{k}$. Resp. $(4yz - 3x^2y)\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + (6xyz)\overrightarrow{k}$.

21. Seja $R(t) = 2cost\overrightarrow{i} + 2sent\overrightarrow{j}$ com $0 \le t \le 2\pi$ e seja $F(x, y) = (x^2 + y)\overrightarrow{i} + 2xy\overrightarrow{j}$. Encontre $\oint < F, dR >$. Resp. -4π.

22. Encontre o trabalho realizado pela força $\overrightarrow{F}$ de $\gamma(-1)$ até $\gamma(1)$, onde $\overrightarrow{F}(x, y) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ e $\gamma(t) = (t, t^2)$, com $t \in [-1, 1]$. Resp. 0.

23. Encontre o trabalho realizado por uma força $\overrightarrow{F}$ para deslocar uma particula do ponto $\gamma(0)$ a $\gamma(2\pi)$, onde $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ e $\gamma(t) = (cost, sent)$ e $F : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$ é dada por $\overrightarrow{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}\overrightarrow{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\overrightarrow{j}$. Resp. 2π.

24. Calcule a área da região limitada pela curva $x = t - sent$, $y = 1 - cost$, $0 \le t \le 2\pi$, e pelo eixo Ox. Resp. $3\pi\ u.q.$ (unidade quadradas).

25. Calcule a área da região limitada pela elipse $x = acost$, $y = bsent$, $0 \le t \le 2\pi$, onde $a > 0$ e $b > 0$. Resp. $ab\pi\ u.q.$ (unidade quadradas).

26. Calcule $\oint_\gamma < \overrightarrow{F}, d\gamma >$, onde γ é uma curva fechada, simples, C^1 por partes, cujo traço é a fronteira de um conjunto compacto e $\overrightarrow{F}(x,y) = (2x+y)\overrightarrow{i} + (3x-y)\overrightarrow{j}$. Resp. 2α onde $\alpha =$ área de K, K é o conjunto compacto do Teo. Green.

27. Calcule $\oint < \overrightarrow{F}, d\gamma >$, onde $\overrightarrow{F}(x,y) = 4x^3y^3\overrightarrow{i} + (3x^4y^2+5x)\overrightarrow{j}$ e γ a fronteira do quadrado de vértice $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

28. Calcule $\int_\gamma \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r}$ sendo dados:

    a) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ e $\gamma(t) = (cost, sent, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Resp. $2\pi^2$.

    b) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x+y+z)\overrightarrow{k}$ e $\gamma(t) = (t, t, 1-t^2)$, $0 \leq t \leq 1$. Resp. $-\frac{11}{6}$.

    c) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = x\overrightarrow{i} + y^2\overrightarrow{j} + z^2\overrightarrow{k}$ e $\gamma(t) = (2cost, 3sent, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Resp. $\frac{8\pi^3}{3}$.

29. Uma partícula move-se no plano de modo que no instante t sua posição é dada por $\gamma(t) = (t, t^2)$. Calcule o trabalho realizado pelom campo de forças $\overrightarrow{F}(x,y) = (x+y)\overrightarrow{i} + (x-y)\overrightarrow{j}$ no deslocamento da partícula de $\gamma(0)$ até $\gamma(1)$. Resp. $1J$.

30. Uma partícula desloca-se em um campo de forças dado por $\overrightarrow{F}(x,y,z) = -y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$. Calcule o trabalho realizado por $\overrightarrow{F}$ no deslocamento da partícula de $\gamma(a)$ até $\gamma(b)$, sendo dados:

    a) $\gamma(t) = (cost, sent, t)$, $a = 0$ e $b = 2\pi$. Resp. $2\pi + 2\pi^2 J$.

    b) $\gamma(t) = (2t+1, t-1, t)$, $a = 1$ e $b = 2$. Resp. $\frac{9}{2}J$.

    c) $\gamma(t) = (cost, 0, sent)$, $a = 0$ e $b = 2\pi$. Resp. $0J$.

31. Verifique o teorema de Green para $\oint_\gamma[(2x^2+y)dx + (3x^2-y^2)dy]$, onde γ é a circunferência de centro na origem e raio 1.

32. Verifique o teorema de Green para $\oint_\gamma[(4x^3+y^2)dx + (5x-y)dy]$, onde γ é a elipse dada por $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

33. Verifique o teorema de Stokes para $\overrightarrow{F}(x,y) = (x^2+3y^2)\overrightarrow{i} + (5x-y^2)\overrightarrow{j}$, onde γ é a fronteira da região K dada por, $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4\}$.

34. Calcule $\oint_\gamma \sqrt[3]{x}dx + \frac{dy}{1+y^2}$, onde γ é um quadrado de vértice $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ e $(-1,1)$ orientado no sentido anti-horário. Resp. 0.

35. Calcule $\int_\gamma \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r}$, onde $\overrightarrow{F}(x,y) = (x+y^2)\overrightarrow{j}$ e γ é a curva do exercício anterior. Resp. 12.

36. Calcule $\int_\gamma (x-y)dx + e^{x+y}dy$, onde γ é a fronteira do triângulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,2)$, orientadas no sentido anti-horário. Resp. $\frac{e^3}{6} - \frac{e}{2} + \frac{5}{6}$.

37. Calcule $\oint_\gamma \overrightarrow{F} d\gamma$, onde γ é uma curva fechada, simples, C^1 por partes, cuja imagem é a fronteira de um compacto B e $\overrightarrow{F}(x,y) = (2x+y)\overrightarrow{i} + (3x-y)\overrightarrow{j}$.

38. Calcule $\oint_\gamma \overrightarrow{F} d\gamma$, onde γ é a fronteira do quadrado de vértices $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ e $\overrightarrow{F}(x,y) = 4x^3y^3\overrightarrow{i} + (3x^4y^2+5x)\overrightarrow{j}$.