Informações Essenciais e Introdução

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

07 de Agosto de 2023

Segundo Semestre de 2023
Turma 2023201

Acesso ao ambiente de aprendizado eletrônico

E-DISCIPLINAS USP

Todas as informações e material do curso estão disponíveis em
https://edisciplinas.usp.br/acessar/

Para o seu primeiro acesso

ID do Usuário: ID or Mail USP

Senha: Sua senha

Você também poderá acessar diversas informações da disciplina em
https://sites.icmc.usp.br/andcarva/sma353/2023201.html

Ementa (Módulos)

- **Introdução :**
  - Porque estudar cálculo
- **Números reais e Funções:**
  - O conjunto dos números reais e algumas propriedades (1)
  - Funções reais a valores reais : Operações e Gráficos (1)
  - Funções elementares: polinomiais, racionais, trigonométricas, logarítimicas e exponenciais (1)
- **Limites e Continuidade:**
  - A noção intuitiva de limite (1)
  - A definição de limite (2)
  - Propriedades do limite (2)
  - Limites laterais (2)
  - Funções contínuas e suas propriedades (2)

Ementa - Continuação

- **A Derivada:**
  - Introdução: Reta tangente e velocidade instantânea (2)
  - Definição de derivada (2)
  - Relação entre derivada e continuidade (3)
  - Regras de derivação: Derivadas de funções elementares (3)
  - A derivada da composta: Regra da cadeia (3)
  - A derivada inversa: trigonométricas inversas e exponencial (3)
  - Acréscimos e diferenciais (3)
  - Derivação implícita (3)
  - O teorema do valor médio (4)
  - Derivadas de ordem superior (4)
  - O polinômio de Taylor (4)

Ementa - Continuação

- **Aplicações da Derivada**
  - Funções crescentes e decrescentes (4)
  - Máximos e mínimos (4)
  - Problemas de máximos e mínimos (4)
  - Concavidade e pontos de inflexão (4)
  - Formas indeterminadas e regras de L'Hospital (5)
  - Assíntotas horizontais e verticais (5)
  - Esboço de gráficos de funções (5)
  - Antiderivadas (5)

Bibliografia

- **Livros texto:**
  - STEWART, J. Cálculo, V. 1, Pioneira
  - THOMAS, G.B. Cálculo, V. 1, Pearson.
- **Bibliografia Complementar:**
  - GUIDORIZZI, H.L. Um Curso de Cálculo, 5ª V. 1, LTC.
  - TÁBOAS, P.Z. Cálculo Diferencial e Integral na Reta, EDUSP
  - SWOKOWSKI, E.W. Cálculo com Geometria Analítica, V. 1.
  - SIMMONS, G.F. Cálculo com Geometria Analítica, V. 1.
  - Notas de aula disponíveis no e-disciplinas e no site.

Provas e Calendário de Aulas

Provas

- Prova 1 no dia 04 de Outubro às 19:00–20:40hs
- Prova 2 no dia 22 de Novembro às 19:00–20:40hs
- Prova Substitutiva no dia 29 de Novembro às 19:00–20:40hs

Horário das Aulas: 19:00–20:40hs (segunda-feira e quarta-feira)
Local das Aulas: Anfiteatro Novo (IFSC)

Calendário de Aulas

Mês	Seg	Qua	Seg	Qua	Seg	Qua	Seg	Qua	Seg	Qua
Ago			07	09	**14**	16	21	23	28	30
Set			**04**	**06**	11	13	18	20	25	27
Out	02	**04**	09	11	16	18	23	25	30	
Nov		01	06	08	13	15	20	**22**	27	**29**
Dez	04	06								

Recuperação de Aprendizado

Você teve que perder alguma prova?

- Caso necessite de recuperação de aprendizado por razões médicas ou algum outro compromisso oficial, você deverá fazer a prova substitutiva no dia 29/11 às 08:00hs.
- Informe-se na Secretaria da Graduação do seu Curso para saber se você pode requerer a recuperação de aprendizado e a documentação necessária.

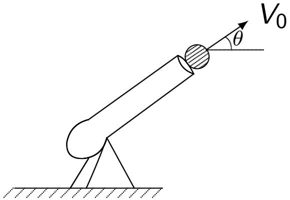
Porque estudar Cálculo

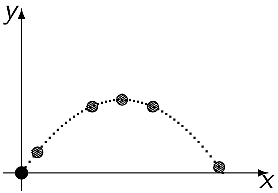
No que segue apresentamos alguns exemplos que pretendem demonstrar que a matemática desenvolvida até o final do ensino médio é insuficiente para abordar alguns problemas importantes com os quais nos deparamos.

Começamos recordando um problema elementar de Física do Ensino Médio.

Exemplo (Lançamento Oblíquo de um Projétil)

Imagine que, saibamos que os projéteis lançados pelos nossos lançadores de projéteis tenham velocidade V_0 *ao sair do lançador e que o alvo situa-se a uma distância* d *de nossos lançadores. Qual é ângulo de disparo para que o alvo seja atingido? Qual é o alcance máximo de nossos lançadores? Qual é a altura máxima que o projétil alcançará?*


V_0
θ


y
x

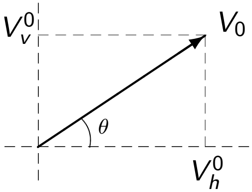
Solução: Em primeiro lugar, para resolver este problema, é preciso encontrar um modelo matemático para o lançamento oblíquo de um projétil. Para encontrar este modelo fazemos algumas suposições:

Suponhamos que

- a resistência do ar seja desprezível,
- a aceleração da gravidade seja constante,
- o ângulo de lançamento seja $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$,
- a altura do lançador relativamente ao solo seja desprezível e
- a altitude seja constante ao longo do campo de lançamento.

Sejam m a massa do projétil e V_0 a sua velocidade inicial.

A velocidade inicial V_0 do projétil pode ser decomposta em velocidade vertical e velocidade horizontal iniciais, isto é



$$\begin{aligned} V_v^0 &= V_0 \mathrm{sen}\theta, \\ V_h^0 &= V_0 \cos\theta. \end{aligned}$$

Se g denota a aceleração da gravidade a velocidade vertical depende do tempo através da relação

$$\boxed{V_v(t) = V_0 \text{sen}\theta - gt} \tag{1}$$

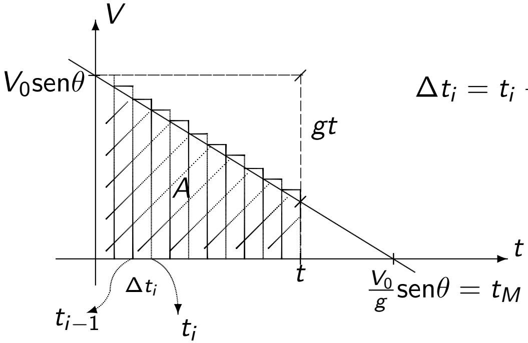
enquanto que a velocidade horizontal é constante ao longo do tempo.

O projétil atingirá a altura máxima no instante t_M tal que $V_v(t_M) = 0$, ou seja

$$\boxed{t_M = \frac{V_0}{g} \text{sen}\theta.} \tag{2}$$

Como obter a altura do projétil como função do tempo?

Note que o gráfico da velocidade vertical como função do tempo é



$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$

Se $t > 0$ e $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ é uma subdivisão do intervalo $[0, t]$ e $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

Como em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ a velocidade é aproximadamente igual a $V_v(t_{i-1})$ temos que neste intervalo o deslocamento vertical é aproximadamente igual a

$$\Delta y_i = y(t_i) - y(t_{i-1}) \sim V_v(t_{i-1})\Delta t_i$$

e o deslocamento vertical correspondente ao intervalo de tempo $[0, t]$ é aproximadamente igual a

$$y = \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i \sim \sum_{i=1}^{n} V_v(t_{i-1})\Delta t_i \sim A$$

onde por $\sim$ queremos espressar o fato que a medida que o comprimento dos intervalos $[t_i, t_{i-1}]$ se aproxima de zero y se aproxima mais e mais da área A sob o gráfico da velocidade no intervalo $[0, t]$.

Como

$$A = V_0 \text{sen}\theta t - \frac{1}{2} g t^2,$$

segue que

$$\boxed{y(t) = V_0 \text{sen}\theta t - \tfrac{1}{2} g t^2} \qquad (3)$$

é o deslocamente vertical do projétil (altura do projétil depois de decorridos t unidades de tempo).

O deslocamenteo horizontal ocorre com velocidade constante $V_h = V_0 \cos\theta$. Logo

$$\boxed{x(t) = V_0 \cos\theta \ t} \qquad (4)$$

De posse do modelo matemático para os deslocamentos horizontal e vertical estamos preparados para resolver o problema proposto:

- O projétil alcançará altura máxima em $t = t_M = \frac{V_0}{g}\operatorname{sen}\theta$. Logo

$$\begin{aligned} y_M = y(t_M) &= V_0 \operatorname{sen}\theta \, t_M - \tfrac{1}{2} g \, (t_M)^2 \\ &= V_0 \operatorname{sen}\theta \, \frac{V_0}{g} \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2} \, g \, \frac{V_0^2}{g^2} \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{g} \operatorname{sen}^2\theta \end{aligned}$$

e

$$\boxed{y_M = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{g} \operatorname{sen}^2\theta.} \tag{5}$$

- O projétil atinge o seu alvo quando $y(t_a) = 0$. Logo $t_a = 2\frac{V_0}{g}\operatorname{sen}\theta$ o que implica

$$x_a = x(t_a) = 2\frac{V_0^2}{g}\operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

e

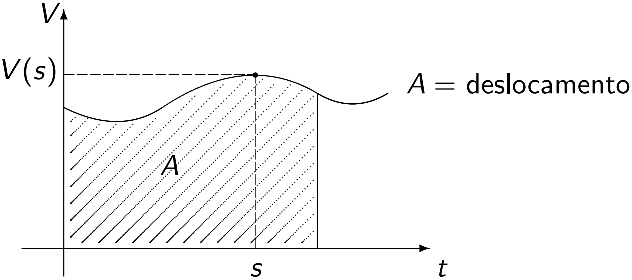
$$\boxed{x_a = \frac{V_0^2}{g}\operatorname{sen}2\theta.} \tag{6}$$

- O alcance do projétil é máximo quando $\theta = \pi/4$.

O que você observa sobre a matemática contida neste exemplo?

1. O procedimento para obtenção do deslocamento vertical é bastante convincente mas requer uma melhor justificativa. O processo de fazer Δt_i pequeno (tender a zero) exige uma melhor formulação que é dada pela noção de limite.

2. Se a velocidade depende do tempo de uma forma mais complicada podemos não ser capazes de encontrar a área sob o gráfico A de forma tão simples. Por exemplo, o projétil pode ser impulsionado durante o precurso (como ocorre no lançamento de foguetes). Deparamos então com o problema de calcular a área sob o gráfico de uma função

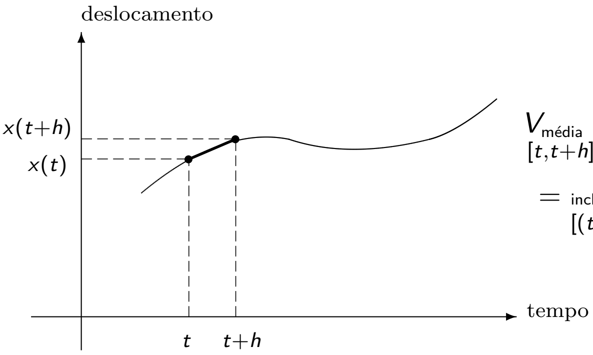


cuja resposta requer a introdução do conceito de integral, proximamente relacionado à noção de limite.

3 Quando a massa do projétil depende do tempo a segunda lei de Newton precisa de uma outra formulação para sermos capazes de equacionar o movimento e mesmo a velocidade instantânea para ser obtida como função do deslocamento precisa da introdução do conceito de derivada.

Exemplo

Conhecido o deslocamento como função do tempo determinar a velocidade instantânea para cada instante de tempo.



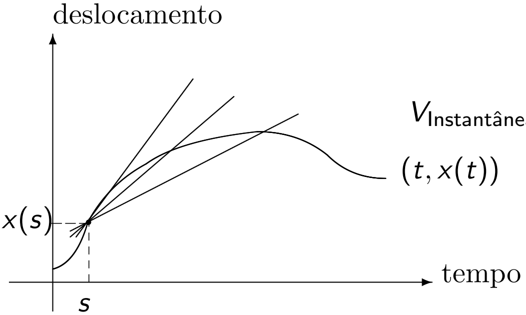
$$\underset{[t,t+h]}{V_{\text{média}}} = \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$

$=$ inclinação do segmento $[(t,x(t)),(t+h\,,x(t+h))]$

A velocidade média V_m no intervalo $[t, t+h]$ é dada por

$$\boxed{V_m = \frac{x(t+h)-x(t)}{h}}$$

e é a inclinação do segmento $[(t, x(t)), (t+h, x(t+h))]$



$V_{\text{Instantânea}} =$ inclinação da reta tangente ao gráfico de $x(\cdot)$ em $t = s$

A velocidade instantânea V_i no instante t é dada por

$$\boxed{V_i = \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h}}$$

e é a inclinação da reta tangente ao gráfico de x no instante t.

Aqui precisamos da noção de limite para definir a velocidade instantânea. O limite que define a velocidade instantânea é chamado derivada da função deslocamento x no instante t.

Vamos considerar os casos de Movimento Uniforme e Movimento Uniformemente Variado.

Movimento Uniforme: Se um corpo se move ao longo de uma reta deslocando-se segundo a equação

$$x(t) = x_0 + v_0 t$$

então, a velocidade em cada instante t é obtida fazendo

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = v_0, \quad h > 0 \quad \text{pequeno}$$

e desta forma a velocidade em cada instante é v_0.

Movimento Uniformemente Variado:
Se um corpo se move ao longo de uma reta deslocando-se segundo a equação

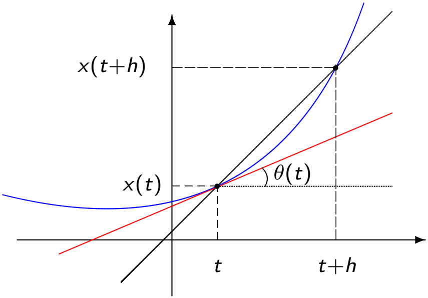
$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

então, a velocidade em cada instante t é obtida fazendo

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = v_0 + at + \frac{a}{2} h, \quad h > 0 \quad \text{pequeno}$$

logo, no instante t a velocidade $v(t)$ é

$$v(t) = v_0 + at.$$



$\mathrm{tg}(\theta(t)) = \mathrm{v}(\mathrm{t})$

A aceleração é obtida da velocidade da seguinte forma

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h}=a, \quad h>0 \quad \text{pequeno}$$

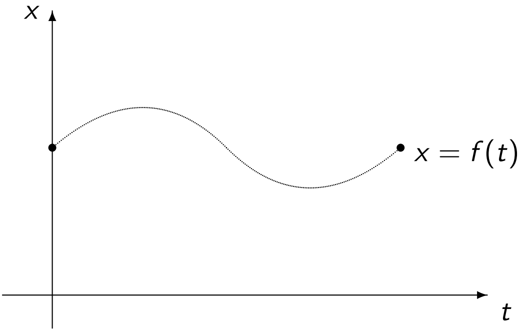
então a aceleração em cada instante t é a.

Observação: Quando o movimento tem expressões mais complicadas como determinar a velocidade e a aceleração?

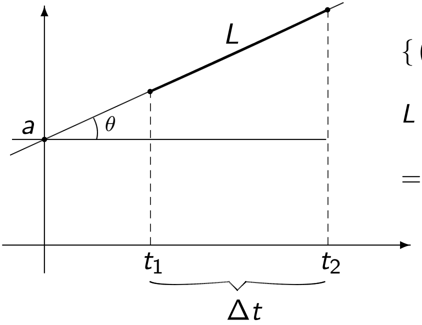
Novamente vamos precisar das noções de limite e derivada.

Exemplo

Cálculo do comprimento de uma curva dada como gráfico de uma função.



Vamos considerar alguns casos particulares

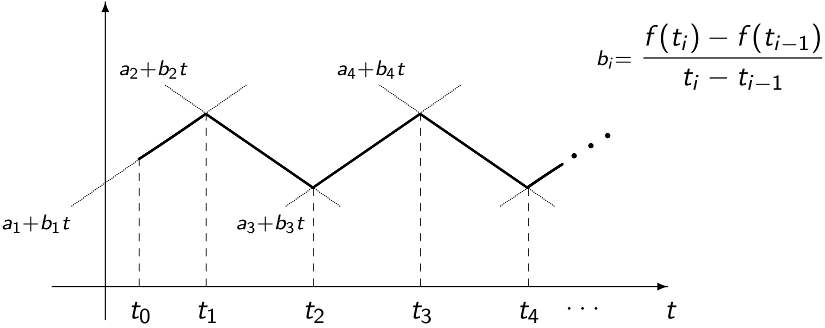


$$\{\,(t, f(t)) : t_1 \le t \le t_2\,\},\;\; b = \operatorname{tg}\theta$$

$$L = \sqrt{(t_2 - t_1)^2 + b^2(t_2 - t_1)^2}$$

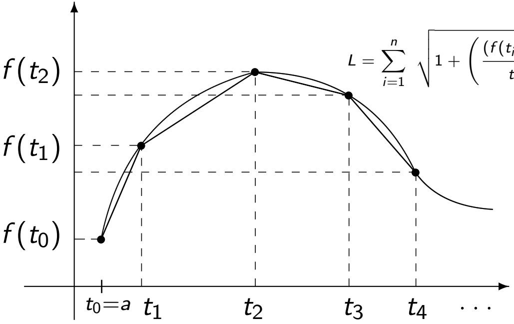
$$= \sqrt{1 + b^2}(t_2 - t_1) = \sqrt{1 + b^2}\,\Delta t$$

Se, por outro lado, f tem uma poligonal por gráfico



$$L = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + b_i^2}\,(t_i - t_{i-1}).$$

No caso geral



$$L = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{(f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right)^2} (t_i - t_{i-1})$$

fornece uma aproximação para

o comprimento da curva se

$(t_i - t_{i-1})$ é pequeno $1 \leq i \leq n$.

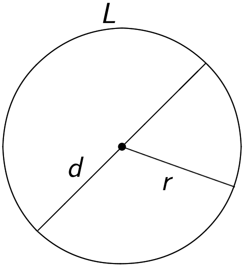
Para obter o valor exato vamos precisar introduzir as noções de limite, derivada e integral,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}dt$$

Exemplo

A área de uma circunferência.

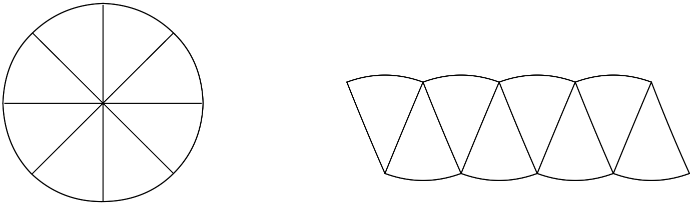
O quociente entre o comprimento de uma circunferência e o diâmetro é um número real denotado por π.



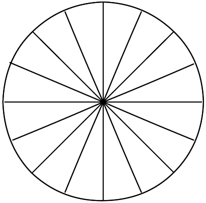
$$L = \pi\, d = 2\pi\, r$$

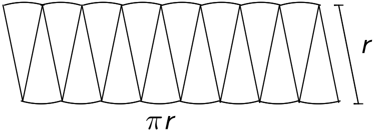
Vamos determinar a área da circunferência de raio r. A idéia de Archimedes (287-212 a.c.) foi dividir a circunferência em setores de igual área e reagrupá-los da seguinte forma

8 Setores



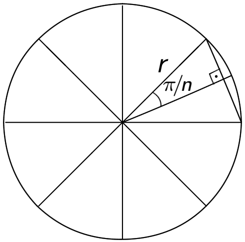
16 Setores





quanto maior o número de setores, na divisão acima, mais a área se aproxima de $\pi r.r = \pi r^2$.

A demonstração deste resultado envolve o conceito de limite. Se dividimos a circunferência em n setores iguais temos



$$A \sim 2n.r\text{sen}\frac{\pi}{n}.r\cos\frac{\pi}{n}.\frac{1}{2} \sim \pi r^2.\frac{\text{sen}\pi/n}{\pi/n}.\cos\pi/n.$$

Se n é grande $\cos\pi/n \sim 1$ e $\frac{\text{sen}\pi/n}{\pi/n} \sim 1$ (primeiro limite fundamental) e teremos

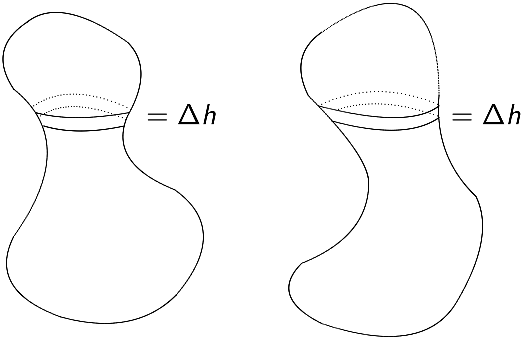
$$A = \pi r^2$$

é, portanto, fundamental entendermos o processo de passagem ao limite para encontrarmos soluções para problemas simples como o cálculo da área de um círculo.

Exemplo

O volume da esfera e o Princípio de Cavalieri

Idéia



$V = \sum$ volumes das seções cilíndricas

Se cada uma das seções tem mesma área, os volumes devem coincidir

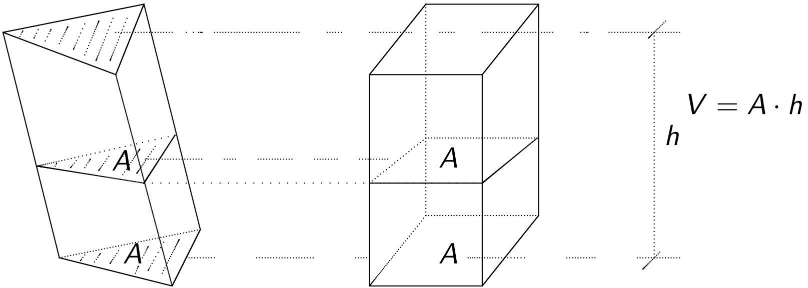
Aqui precisamos do processo de passagem ao limite para mostrar que o volume do sólido pode ser aproximado pela soma dos volumes das seções. Este resultado é axiomatizado no seguite princípio.

Theorem (Princípio de Cavalieri)

São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então estes sólidos tem o mesmo volume.

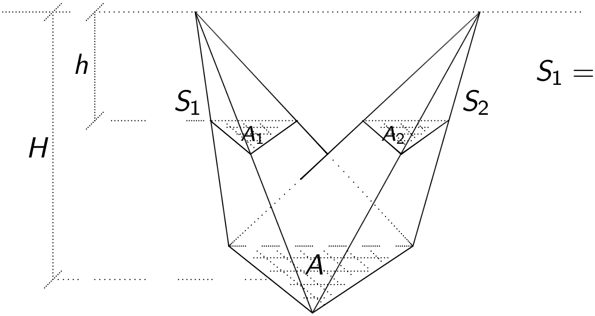
Aplicações:

Volume de um prisma triangular



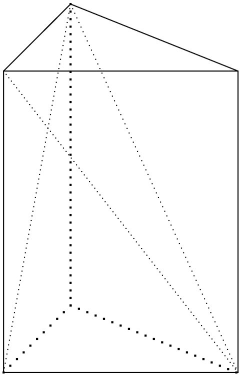
Volume de uma pirâmide triangular

Observe primeiramente que do Princípio de Cavalieri podemos mover livremente o vértice de uma pirâmide em um plano paralelo ao plano da base sem alterar o seu volume.



$$S_1 = S_2$$

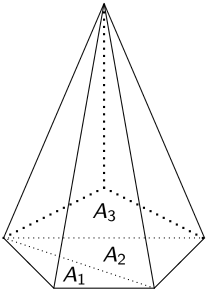
Lembrando que o volume de um prisma com área da base A e altura h é $V = A.h$ e aplicando o resultado acima à figura abaixo temos o volume de uma pirâmide triangular.



$$V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} \quad V_{\text{Prisma}} = \frac{1}{3} A \cdot h$$

Volume de uma pirâmide qualquer

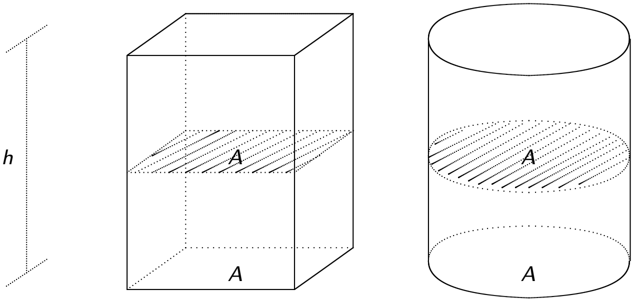
O volume de uma pirâmide qualquer é obtido observando que uma pirâmide qualquer é a união de pirâmides triangulares. Assim



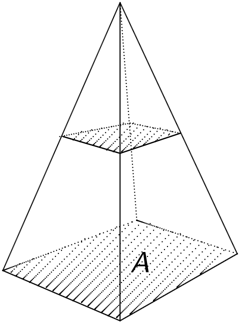
$$V = \frac{1}{3}\,A_1\,h + \frac{1}{3}\,A_2\,h + \frac{1}{3}\,A_3\,h = \frac{1}{3}\,A\,h$$

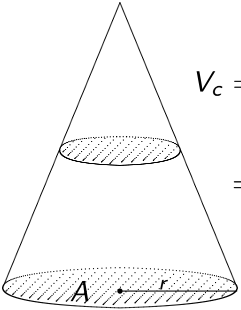
Volume de um cone e de um cilindro

Para encontrar o volume de um cilíndro e o volume de um cone basta observar as figuras abaixo



$$V = A \cdot h$$



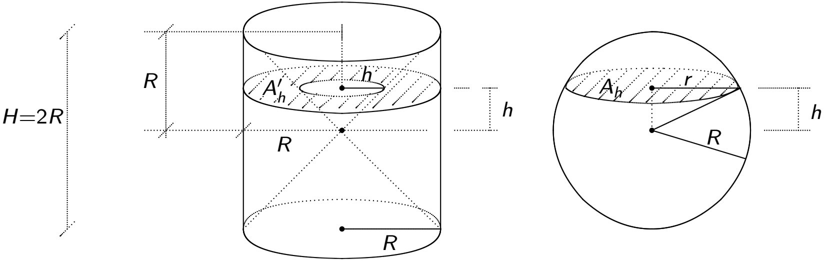


$$V_c = \frac{1}{3}\, A \cdot h$$

$$= \frac{1}{3}\, \pi\, r^2 \cdot h$$

Volume da Esfera

Para calcular o volume da esfera de raio R construímos um cilindro reto de raio da base R e altura $2R$ e retiramos dos mesmo os dois cones centrais formados pela união do centro do cilindro à borda da base e do topo do cilindro (veja figura a seguir). Se apoiamos a esfera no plano da base do cilindro e seccionamos ambos os sólidos por um plano paralelo ao plano da base do cilindro (conforme figura) obtemos um anel (ao sectionar o cilindro sem o cone central) de área A'_h e uma circunferência de área A_h.


H=2R
R
A'_h
h
R
h
R
A_h
r
h
R

Note que $r^2 = R^2 - h^2$ e portanto

$$A'_h = \pi(R^2 - h^2) = \pi r^2 = A_h$$

Segue do Princípio de Cavalieri que o volume V_E da esfera é igual ao volume do cilindro menos os cones centrais. Assim

$$V_E = \pi R^2.H - 2.\frac{1}{3}\pi R^2 \frac{H}{2} = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

e portanto

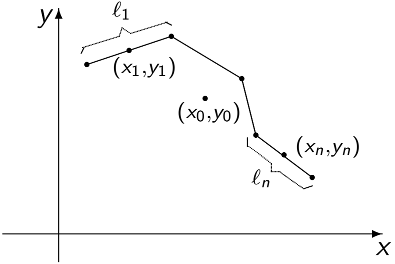
$$\boxed{V_E = \tfrac{4}{3}\pi R^3}.$$

Exemplo

Quanta borracha é necessária para fazer uma câmara de ar com raio menor $10cm$*, raio maior* $50cm$ *e espessura* $0,1cm$*.*

Para resolver este problema introduzimos a noção de centro de massa de uma poligonal plana (c denota a densidade linear).

Inicialmente definimos o ponto médio de um segmento como o seu centro de massa. Assim o centro de massa de uma poligonal é dado por:



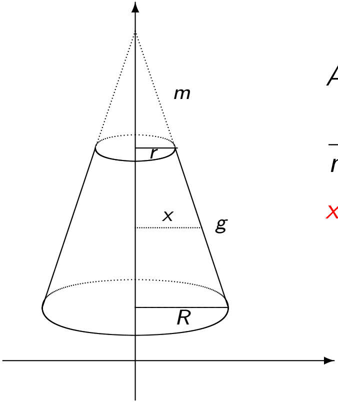
$$x_0 = \frac{c \cdot \ell_1 \cdot x_1 + \cdots + c \cdot \ell_n \cdot x_n}{c \cdot \ell_1 + \cdots + c \cdot \ell_n}$$

$$= \frac{\ell_1 \cdot x_1 + \cdots + \ell_n \cdot x_n}{\ell_1 + \cdots + \ell_n}$$

$$y_0 = \frac{c \cdot \ell_1 \cdot y_1 + \cdots + c \cdot \ell_n \cdot y_n}{c \cdot \ell_1 + \cdots + c \cdot \ell_n}$$

$$= \frac{\ell_1 \cdot y_1 + \cdots + \ell_n \cdot y_n}{\ell_1 + \cdots + \ell_n}$$

A área lateral de um tronco de cone é obtida da seguinte forma,

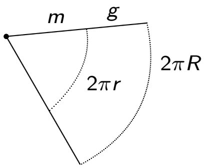


$$A_T = ?$$

$$\frac{R}{m+g} = \frac{r}{m} = \frac{R-r}{g}$$

$$x = \frac{R+r}{2}$$

onde x é a coordenada do centro de gravidade do segmento ou a distância do centro de gravidade do segmento ao eixo de rotação.



$$\cancel{2\pi}\cancel{(m+g)} \text{ —— } \pi(m+g)^{\cancel{2}}$$

$$\cancel{2\pi}R \text{ —— } A_E$$

$$A_E = \pi R(m+g)$$

$$A_I = \pi rm$$

Assim a área lateral A_T do tronco de cone é dada por

$$A_T = \pi R(m+g) - \pi rm = \pi Rg + \pi(R-r)m = \pi(R+r)g = 2\pi\frac{R+r}{2}g$$

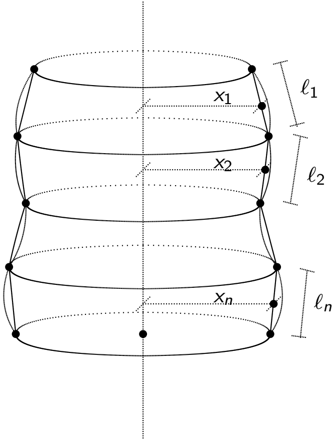
e desta forma

$$\boxed{A_T = 2\pi xg}$$

Note ainda que $2\pi x$ é a distância que o centro de gravidade percorre ao girarmos o segmento em torno do eixo de rotação para produzir o tronco de cone.

Desta forma a área da superfície obtida ao girarmos um segmento em torno de um eixo de rotação (tronco de cone) é o produto da distância percorrida pelo centro de massa do segmento pelo comprimento do segmento.

Isto se generaliza facilmente para a superfície gerada pela revolução de uma poligonal plana em torno de um eixo de rotação pois esta superfície é formada pela justaposição de diversos troncos de cone



$$A = 2\pi\, x_1 \cdot \ell_1 + \cdots + 2\pi\, x_n \cdot \ell_n$$

$$= 2\pi\ \frac{(x_1\ell_1 + x_2\ell_2 + \cdots + x_n\ell_n)}{\ell_1 + \cdots + \ell_n} \cdot L$$

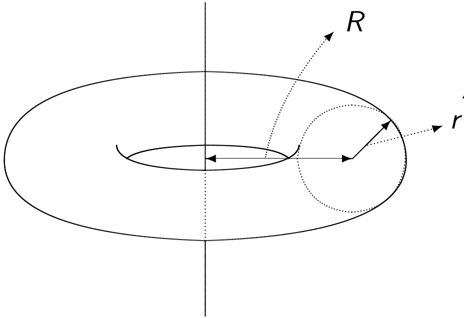
$$= 2\pi\, x_0 \cdot L \quad , \quad L = \ell_1 + \cdots + \ell_n$$

Um processo de passagem ao limite (tomando mais e mais pontos sobre a curva) resulta no seguinte resultado

Theorem (Teorema de Pappus)

Se uma linha plana gira em torno de um eixo de seu plano a área da superfície gerada é igual ao comprimento dessa linha multiplicado pelo comprimento da circunferência descrita por seu centro de massa.

De volta ao problema da câmara de ar



$$A_c = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 Rr$$

O volume de borracha necessário para construir tal câmara é, aproximadamente,

$$V = 4\pi^2.50cm^3.$$

Como aprender Cálculo

Não há uma receita de como aprender cálculo. As seguintes observações podem podem ser úteis para o estudante:

- Não é possível ler e entender cálculo como se lê e entende um romance ou um jornal.
- Leia o texto com atenção e paciência, procurando entender profundamente os conceitos e resultados apresentados. A velocidade de leitura não é importante aqui.
- Acompanhe os exemplos passo a passo procurando desvendar o porque de cada passagem e tentando enxergar porque o autor adotou esta solução. Tente soluções alternativas.
- Procure discutir os conceitos desenvolvidos em sala de aula com os colegas.

- Pratique os conceitos aprendidos resolvendo as listas de exercícios. Não se aprende cálculo contemplativamente. É importante fazer muitos exercícios.
- Também não se aprende cálculo apenas assistindo às aulas ou somente fazendo exercícios. É preciso assistir às aulas, estudar e refletir sobre os conceitos e fazer muitos exercícios.
- É muito importante frequentar as monitorias ainda que seja somente para inteirar-se das dúvidas dos colegas.
- Não desista de um exercício quando a sua solução não é óbvia, insista e descubra o prazer de desvendar os pequenos mistérios do cálculo.