Números - Aula 02

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

09 de Agosto de 2023

Segundo Semestre de 2023
Turma 2023201

Faremos uma apresentação sucinta do conjunto dos números naturais, inteiros, racionais e reais e suas construções para servir como recordação de conceitos vistos no ensino médio e algumas formalizações que ajudam na compreensão dos conceitos que serão desenvolvidos posteriormente.

Escreveremos

$$\boxed{\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}=\text{Conjunto dos números naturais,}}$$

$$\boxed{\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}=\text{Conjunto dos números inteiros,}}$$

$$\boxed{\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\,;\ a,b\in\mathbb{Z}\,,\ b>0\right\}=\text{Conjunto dos números racionais.}}$$

Os Números Naturais

Os números naturais são os que utilizamos para contar objetos e são caracterizados pelos **Axiomas de Peano**:

1. Todo número natural tem um único sucessor.
2. Números naturais diferentes tem sucessores diferentes.
3. Existe um único natural, chamado **zero** (denotado por 0), que não é sucessor de nenhum número natural.
4. Seja $X \subset \mathbb{N}$ tal que $0 \in X$ e, se $n \in X$, seu sucessor (denotado por $n+1$) também pertence a X. Então $X = \mathbb{N}$.

A adição é definida por: $n+0=n$, $n \in \mathbb{N}$, e $n+(p+1)=(n+p)+1$, $n, p \in \mathbb{N}$, (sabendo somar p sabemos somar $p+1$).

A multiplicação é definida por: $n \cdot 0=0$ e $n \cdot (p+1)=n \cdot p+n$, $n,p \in \mathbb{N}$.

Prova por Indução

O quarto Axioma de Peano é conhecido como axioma de indução e é frequentemente utilizado em demonstrações matemáticas.

Prova por Indução: Dado que uma proposição $P(n)$, definida para todo $n \in \mathbb{N}$, pode ser verdadeira ou falsa, para verificar que a mesma é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ basta verificar que:

- $P(0)$ é verdadeira e
- Se $n \in \mathbb{N}$ é tal que $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ também é.

De fato: Se X denota o conjunto dos números naturais n para os quais $P(n)$ é verdadeira, então $0 \in X$ e, se $n \in X$, então $n+1 \in X$. Logo $X = \mathbb{N}$ pelo quarto Axioma de Peano.

Exercícios (Para entregar dia 16/08/2023):

(1) Mostre que $n + 0 = 0 + n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(2) Mostre que $n \cdot 1 = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e que a adição e multiplicação definidas acima são comutativas e associativas.

Vamos provar a comutatividade e associatividade da adição:

Lema (1)

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $1 + n = n + 1$.

Prova: Note que o resultado é válido para $n = 0$. Suponha que o resultado seja válido para $n = k$ e mostremos que vale também para $n = k + 1$. De fato, da hipótese da indução (h) e da definição de adição (d),

$$1 + (k + 1) \overset{(d)}{=} (1 + k) + 1 \overset{(h)}{=} (k + 1) + 1$$

Segue que o resultado vale para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Agora motremos a associatividade.

Lema (Associatividade)

Para todo $n, p, r \in \mathbb{N}$, $(n+p)+r = n+(p+r)$.

Prova: Note que o resultado é válido trivialmente para $r = 0$ e para $r = 1$. Suponha que o resultado seja válido para $r = k$ e mostremos que vale também para $r = k+1$. De fato, da hipótese da indução (h) e da definição de adição (d),

$$\begin{aligned} n+(p+(k+1)) &\overset{(d)}{=} n+((p+k)+1) \overset{(d)}{=} (n+(p+k))+1 \\ &\overset{(h)}{=} ((n+p)+k)+1 \overset{(d)}{=} (n+p)+(k+1). \end{aligned}$$

Segue que o resultado vale para todo $r \in \mathbb{N}$. $\square$

Por fim provamos a comutatividade

Lema (Comutatividade)

Para todo $n, p \in \mathbb{N}$, $n + p = p + n$.

Prova: Note que o resultado é válido trivialmente para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $p = 0$ ou $p = 1$. Suponha que o resultado seja válido para $p = k$ e mostremos que vale também para $p = k + 1$. De fato, da hipótese da indução (h), da definição de adição (d), do Lema (1) (l1) e do Lema (Associatividade) (la),

$$\begin{aligned} n + (k+1) &\overset{(d)}{=} (n+k)+1 \overset{(h)}{=} (k+n)+1 \\ &\overset{(\mathrm{l1})}{=} 1+(k+n) \overset{(\mathrm{la})}{=} (1+k)+n \overset{(\mathrm{l1})}{=} (k+1)+n. \end{aligned}$$

Segue que o resultado vale para todo $p \in \mathbb{N}$.$\square$

Ordem

De maneira natural definimos uma ordem em $\mathbb{N}$. Diremos que $m \leqslant n$ se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$.

Esta relação tem as seguinte propriedades:

- O_1: *Reflexiva:* Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant n$.
- O_2: *Antisimétrica:* Se $m \leqslant n$ e $n \leqslant m$, então $m = n$.
- O_3: *Transitiva:* Se $m \leqslant n$ e $n \leqslant p$, então $m \leqslant p$.
- O_4: Dados $m, n \in \mathbb{N}$ temos que ou $m \leqslant n$ ou $n \leqslant m$.
- O_5: Se $m \leqslant n$ e $p \in \mathbb{N}$, então $m + p \leqslant n + p$ e $mp \leqslant np$.

Ordem

De maneira natural definimos uma ordem em $\mathbb{N}$. Diremos que $m \leqslant n$ se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$.

Esta relação tem as seguinte propriedades:

- O_1: *Reflexiva:* Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant n$.
- O_2: *Antisimétrica:* Se $m \leqslant n$ e $n \leqslant m$, então $m = n$.
- O_3: *Transitiva:* Se $m \leqslant n$ e $n \leqslant p$, então $m \leqslant p$.
- O_4: Dados $m, n \in \mathbb{N}$ temos que ou $m \leqslant n$ ou $n \leqslant m$.
- O_5: Se $m \leqslant n$ e $p \in \mathbb{N}$, então $m + p \leqslant n + p$ e $mp \leqslant np$.

Mostre as propriedades acima (Para entregar dia 16/08/2023).

Exercício (Mostre que:)

- *Todo subjconjunto não vazio de* $\mathbb{N}$ *tem um menor elemento.*

- $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, *para todo* $n \in \mathbb{N}^*$.

- *Todo número natural não nulo é produto de fatores primos.*

  De fato: *Sejam* $S = \{n \in \mathbb{N}^* : n$ *é produto de fatores primos*$\}$ *e* $A = \{n \in \mathbb{N}^* : n \notin S\}$. *Note que o produto de elementos de* S *está em* S. *Se* $A \neq \emptyset$, *então* A *tem um primeiro elemento* a. *Como* $a \notin S$ *devemos ter que* $a = m \cdot n$ *com* $m, n \in \mathbb{N}^*$ *distintos de* 1 (*caso contrário* a *seria primo*). *Note que* $n < a$ *e* $m < a$ *e ao menos um deles pertence a* A. *Isto é uma contradição pois* a *é o menor elemento de* A. *Segue que* $A = \emptyset$.

Os Números Inteiros

A maneira usual de fazer a construção dos inteiros a partir dos naturais consiste em tomar os pares ordenados de números naturais com a seguinte identificação $(a, b) \sim (c, d)$ se $a + d = b + c$.

Desta forma, podemos representar $\mathbb{N} = \{(0,0), (1,0), (2,0), (3,0), \cdots\}$ e $-\mathbb{N}^* = \{\cdots, (0,3), (0,2), (0,1)\}$.

Tomar o sucessor significa somar 1 à primeira coordenada e, para os inteiros negativos, voltar a identificar $(1, n)$ com $(0, n-1)$.

Os Números Racionais

Os números racionais são construídos tomando-se o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ e identificando os pares $(a, b) \sim (c, d)$ para os quais $ad = bc$. Representamos um par (a, b) em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ por $\frac{a}{b}$.

A **soma** e o **produto** em $\mathbb{Q}$ são dados, respectivamente, por:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd} \,.$$

Chamamos **adição** a operação que a cada par $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa sua soma $x + y \in \mathbb{Q}$ e chamamos **multiplicação** a operação que a cada par $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa seu produto $x \cdot y \in \mathbb{Q}$.

A terna $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, ou seja, $\mathbb{Q}$ munido das operações "$+$" e "$\cdot$" satisfaz as propriedades de um corpo. Isto quer dizer que valem as propriedades seguintes:

Propriedades da Adição em $\mathbb{Q}$

(A1) (**associativa**) $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(A2) (**comutativa**) $x + y = y + x$, $\forall\ x, y \in \mathbb{Q}$;

(A3) (**elemento neutro**) existe $0 \in \mathbb{Q}$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(A4) (**oposto**) para todo $x \in \mathbb{Q}$, existe $y \in \mathbb{Q}$ $(y = -x)$, tal que $x + y = 0$;

Propriedades da Multiplicação em $\mathbb{Q}$

(M1) (**associativa**) $(xy)z = x(yz), \forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(M2) (**comutativa**) $xy = yx$, para todo $x, y \in \mathbb{Q}$;

(M3) (**elemento neutro**) existe $1 \in \mathbb{Q}$, tal que $x1 = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(M4) (**elemento inverso**) para todo $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, existe $y \in Q$, $\left(y = \frac{1}{x}\right)$, tal que $x \cdot y = 1$;

Propriedade Distributiva em $\mathbb{Q}$

(D) **(distributiva da multiplicação)**
$x(y+z) = xy + xz, \ \forall\, x, y, z \in \mathbb{Q}\,.$

Apenas com estas 9 propriedades podemos provar todas as operações algébricas com o corpo $\mathbb{Q}$. Vamos enunciar algumas e demonstrar outras a seguir.

Proposição (Lei do Cancelamento)

Em $\mathbb{Q}$, vale

$$\boxed{x + z = y + z \implies x = y}$$

e, se $z \neq 0$

$$\boxed{x \cdot z = y \cdot z \implies x = y\,.}$$

Prova:

$$\begin{aligned} x &= x + 0 = x + (z + (-z)) = (x + z) + (-z) \\ &= (y + z) + (-z) = y + (z + (-z)) = y + 0 = y. \square \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x &= x.1 = x.(z.\tfrac{1}{z}) = (x.z).(\tfrac{1}{z}) \\ &= (y.z).(\tfrac{1}{z}) = y.(z.(\tfrac{1}{z})) = y.1 = y. \square \end{aligned}$$

Proposição

O elementos neutros da adição e da multiplicação são únicos.

As seguintes proposições seguem da Lei do Cancelamento.

Proposição

O elemento oposto e o elemento inverso são únicos.

Proposição

Para todo $x \in \mathbb{Q}$, $x \cdot 0 = 0$.

Proposição

Para todo $x \in \mathbb{Q}$, $-x = (-1)x$.