Números - Aula 03

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

16 de Agosto de 2023

Segundo Semestre de 2023
Turma 2023201

Os Números Racionais

Os números racionais são construídos tomando-se o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ e identificando os pares $(a, b) \sim (c, d)$ para os quais $ad = bc$. Representamos um par (a, b) em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ por $\frac{a}{b}$.

Chamamos **adição** a operação que a cada par $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa sua soma $x + y \in \mathbb{Q}$ e chamamos **multiplicação** a operação que a cada par $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa seu produto $x \cdot y \in \mathbb{Q}$.

A **soma** e o **produto** em $\mathbb{Q}$ são dados, respectivamente, por:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd}$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}\,.$$

A terna $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, ou seja, $\mathbb{Q}$ munido das operações "$+$" e "$\cdot$" satisfaz as propriedades de um corpo. Isto quer dizer que valem as propriedades seguintes:

Propriedades da Adição em $\mathbb{Q}$

(A1) (**associativa**) $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(A2) (**comutativa**) $x + y = y + x$, $\forall\ x, y \in \mathbb{Q}$;

(A3) (**elemento neutro**) existe $0 \in \mathbb{Q}$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(A4) (**oposto**) para todo $x \in \mathbb{Q}$, existe $y \in \mathbb{Q}$ $(y = -x)$, tal que $x + y = 0$;

Propriedades da Multiplicação em $\mathbb{Q}$

(M1) (**associativa**) $(xy)z = x(yz)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(M2) (**comutativa**) $xy = yx$, para todo $x, y \in \mathbb{Q}$;

(M3) (**elemento neutro**) existe $1 \in \mathbb{Q}$, tal que $x1 = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(M4) (**elemento inverso**) para todo $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, existe $y \in Q$, $\left(y = \frac{1}{x}\right)$, tal que $x \cdot y = 1$;

Propriedade Distributiva em $\mathbb{Q}$

(D) **(distributiva da multiplicação)**
$x(y+z) = xy + xz, \ \forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Apenas com estas 9 propriedades podemos provar todas as operações algébricas com o corpo $\mathbb{Q}$. Vamos enunciar algumas e demonstrar outras a seguir.

Proposição (Lei do Cancelamento)

Em $\mathbb{Q}$, vale

$$\boxed{x + z = y + z \implies x = y}$$

e, se $z \neq 0$

$$\boxed{x \cdot z = y \cdot z \implies x = y\,.}$$

Prova:

$$\begin{aligned} x &= x + 0 = x + (z + (-z)) = (x + z) + (-z) \\ &= (y + z) + (-z) = y + (z + (-z)) = y + 0 = y. \square \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x &= x.1 = x.(z.\tfrac{1}{z}) = (x.z).(\tfrac{1}{z}) \\ &= (y.z).(\tfrac{1}{z}) = y.(z.(\tfrac{1}{z})) = y.1 = y. \square \end{aligned}$$

Proposição

O elementos neutros da adição e da multiplicação são únicos.

As seguintes proposições seguem da Lei do Cancelamento.

Proposição

O elemento oposto e o elemento inverso são únicos.

Proposição

Para todo $x \in \mathbb{Q}$, $x \cdot 0 = 0$.

Proposição

Para todo $x \in \mathbb{Q}$, $-x = (-1)x$.

Definição

Diremos que

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ é } \begin{cases} \textbf{não-negativo}, \textit{ se } a \cdot b \in \mathbb{N} \\ \textbf{positivo}, \textit{ se } a \cdot b \in \mathbb{N} \textit{ e } a \neq 0 \end{cases}$$

e diremos que

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ é } \begin{cases} \textbf{não-positivo}, \textit{ se } \dfrac{a}{b} \textit{ não for positivo} \\ \textbf{negativo}, \textit{ se } \dfrac{a}{b} \textit{ não for não-negativo.} \end{cases}$$

Definição

Sejam $x, y \in \mathbb{Q}$*. Diremos que* x *é* **menor do que** y *e escrevemos* $x < y$*, se existir* $t \in \mathbb{Q}$ *positivo tal que*

$$y = x + t.$$

Neste mesmo caso, poderemos dizer que y *é* **maior do que** x *e escrevemos* $y > x$*. Em particular, teremos* $x > 0$ *se* x *for positivo e* $x < 0$ *se* x *for negativo.*

Se $x < y$ ou $x = y$, então escreveremos $x \leqslant y$ e lemos "*x é menor ou igual a y*".

Da mesma forma, se $y > x$ ou $y = x$, então escreveremos $y \geqslant x$ e, neste caso, lemos "*y é maior ou igual a x*".

Escreveremos $x \geqslant 0$ se x for não-negativo e $x \leqslant 0$ se x for não-positivo.

A quádrupla $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leqslant)$ satisfaz as propriedades de um corpo ordenado, isto é, também valem as propriedades seguintes:

(O1) (**reflexiva**) $x \leqslant x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(O2) (**anti-simétrica**) $x \leqslant y$ e $y \leqslant x \implies x = y$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$;

(O3) (**transitiva**) $x \leqslant y$, $y \leqslant z \implies x \leqslant z$, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(O4) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$, $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$;

(OA) $x \leqslant y \implies x + z \leqslant y + z$;

(OM) $x \leqslant y$ e $z \geqslant 0 \implies xz \leqslant yz$.

Proposição

Para quaisquer x, y, z, w no corpo ordenado $\mathbb{Q}$, valem

(a) $$\left.\begin{array}{l} x \leqslant y \\ z \leqslant w \end{array}\right\} \Longrightarrow \; x + z \leqslant y + w.$$

(b) $$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant z \leqslant w \end{array}\right\} = \; xz \leqslant yw.$$

Prova: Vamos provar o ítem (b).

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant z \leqslant w \end{array}\right\} \overset{(OM)}{=} \left.\begin{array}{l} xz \leqslant yz \\ yz \leqslant yw \end{array}\right\} \overset{(O3)}{=} xz \leqslant yw. \square$$

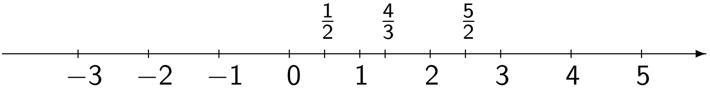
Outras propriedades:

Sejam $x, y, z, w \in \mathbb{Q}$. Então valem

- $x < y \iff x + z < y + z$;
- $z > 0 \iff \dfrac{1}{z} > 0$;
- $z > 0 \iff -z < 0$;
- Se $z > 0$, então $x < y \iff xz < yz$;
- Se $z < 0$, então $x < y \iff xz > yz$;
- $\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant x < y \\ 0 \leqslant z < w \end{array}\right\} = xz < yw$;
- $0 < x < y \iff 0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$;
- **(tricotomia)** $x < y$ ou $x = y$ ou $x > y$;
- **(anulamento do produto)** $xy = 0 \iff x = 0$ ou $y = 0$.

$\mathbb{Q}$ não é completo

Os números racionais podem ser representados por pontos em uma reta horizontal ordenada, chamada reta real.

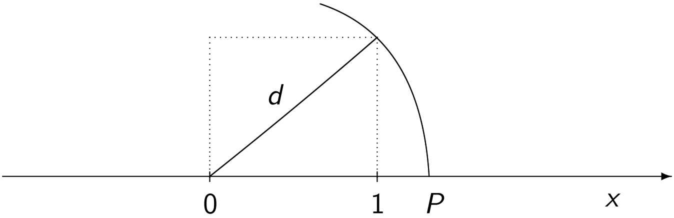


Se P for a representação de um número racional x, diremos que x é a abscissa de P. Nem todo ponto da reta real é racional.

Considere um quadrado de lado 1 e diagonal d. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Seja P a intersecção do eixo x com a circunferência de centro em 0 e raio d.



Mostraremos que P é um ponto da reta com abscissa $x \notin \mathbb{Q}$.

Proposição

Seja $a \in \mathbb{Z}$. Temos

(a) *Se a for ímpar, então a^2 é ímpar;*

(b) *Se a^2 for par, então a é par.*

Prova:

(a) Se a for ímpar, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2k + 1$. Daí segue que

$$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{\ell}) + 1 = 2\ell + 1,$$

onde $\ell = 2k^2 + 2k$, e portanto a^2 também será ímpar.

(b) Suponha, por redução ao absurdo, que a não é par. Logo a é ímpar. Então, pela Proposição 7 (a), a^2 também é ímpar, o que contradiz a hipótese. Portanto a é par. $\square$

Proposição

A equação $x^2 = 2$ não admite solução em $\mathbb{Q}$.

Prova: Suponhamos, por redução ao absurdo, que $x^2 = 2$ tem solução em $\mathbb{Q}$. Então podemos tomar $x = \dfrac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $\dfrac{a}{b}$ irredutível. Logo $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = 2$, ou seja, $a^2 = 2b^2$ e portanto a^2 é par. Segue da Proposição 7 (b) que a também é par. Portanto existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2k$.

Mas

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 2b^2 \\ a = 2k \end{array}\right\} \implies 2b^2 = 4k^2 \implies b^2 = 2k^2 .$$

Portanto b^2 é par e, pela Proposição 7 (b), b também é par. Mas isto implica que $\dfrac{a}{b}$ é redutível (pois a e b são divisíveis por 2) o que é uma contradição. Logo não existe $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tal que $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = 2$. $\square$

Exercício

Sejam $p_1, p_2, \cdots p_n$ números primos distintos. Mostre que a equação $x^2 = p_1 p_2 \cdots p_n$ não admite solução racional.

Corpos

Vimos que os números racionais com a sua adição, multiplicação e relação de ordem é um corpo ordenado.

Estaremos também interessados no corpo dos números reais $\mathbb{R}$ e no corpo dos números complexos $\mathbb{C}$. Abstratamente, um corpo é um conjunto não vazio $\mathbb{F}$ onde estão definidas duas operações binárias

$$+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$$
$$(x, y) \mapsto x + y$$

$$\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$$
$$(x, y) \mapsto x \cdot y$$

que gozam das seguintes propriedades

Propriedades de um Corpo - Adição

(A1) (**associativa**) $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{F}$;

(A2) (**comutativa**) $x + y = y + x$, $\forall\ x, y \in \mathbb{F}$;

(A3) (**elemento neutro**) existe $0 \in \mathbb{F}$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{F}$;

(A4) (**oposto**) para todo $x \in \mathbb{F}$, existe $y \in \mathbb{F}$ $(y = -x)$, tal que $x + y = 0$;

Propriedades de um Corpo - Multiplicação

(M1) (**associativa**) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{F}$;

(M2) (**comutativa**) $x \cdot y = y \cdot x$, para todo $x, y \in \mathbb{F}$;

(M3) (**elemento neutro**) existe $1 \in \mathbb{F}$, tal que $x \cdot 1 = x$, para todo $x \in \mathbb{F}$;

(M4) (**elemento inverso**) para todo $x \in \mathbb{F}$, $x \neq 0$, existe $y \in \mathbb{F}$, $\left(y = \frac{1}{x}\right)$, tal que $x \cdot y = 1$;

Propriedades de um Corpo - Distributiva

(D) **(distributiva da multiplicação)**
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \ \forall \ x, y, z \in \mathbb{F}$.

Se no corpo $\mathbb{F}$ está definida uma relação de ordem $\leqslant$, a quádrupla $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leqslant)$ é um corpo ordenado se além das propriedades anteriores, também valem as propriedades:

(O1) (**reflexiva**) $x \leqslant x$, para todo $x \in \mathbb{F}$;

(O2) (**anti-simétrica**) $x \leqslant y \;\text{ e }\; y \leqslant x \implies x = y$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{F}$;

(O3) (**transitiva**) $x \leqslant y\,,\; y \leqslant z \implies x \leqslant z$, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{F}$;

(O4) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{F}$, $x \leqslant y \;\text{ ou }\; y \leqslant x$;

(OA) $x \leqslant y \implies x + z \leqslant y + z$;

(OM) $x \leqslant y \;\text{ e }\; z \geqslant 0 \implies x \cdot z \leqslant y \cdot z$.

Definição

- *Diremos que um subconjunto A de um corpo ordenado $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leqslant)$ é limitado superiormente se existe $L \in \mathbb{F}$ (chamado limitante superior de A) tal que $a \leqslant L$ para todo $a \in A$.*
- *Se $A \subset \mathbb{F}$ for limitado superiormente, diremos que um número $\sup(A) \in \mathbb{F}$ é o supremo de A, se for o menor limitante superior de A; ou seja, se $a \leqslant \sup(A)$ para todo $a \in A$ e, se $\mathbb{F} \ni f < \sup(A)$, existe $a \in A$ tal que $f < a$.*
- *Um corpo ordenado para o qual todo subconjunto limitado superiormente possui supremo é chamado um corpo ordenado completo.*

Nem todo subconjunto limitado superiormente de $\mathbb{Q}$ tem supremo; ou seja, $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado que não é completo.