Números - Aula 04

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

21 de Agosto de 2023

Segundo Semestre de 2023

Turma 2023201

Construção dos Números Reais - Cortes de Dedekind

O que são os números reais?

Como definir adição, multiplicação de números reais?

O conjunto dos números reais com a adição e multiplicação é um corpo?

Como definir relação de ordem para números reais?

O corpo ordenado dos números reais é completo?

A idéia que queremos usar para construir (a partir de $\mathbb{Q}$) o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é:

> "O conjuntos dos números reais preenche toda a reta real."

Os elementos de $\mathbb{R}$ serão os subconjuntos de $\mathbb{Q}$ a esquerda de um ponto da reta real e serão chamados cortes.

Definição

Um corte é um subconjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ com as seguintes propriedades

- $\alpha \neq \varnothing$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$,
- *Se $p \in \alpha$ e $\mathbb{Q} \ni q < p$, então $q \in \alpha$ (todos os racionais a esquerda de um elemento de α estão em α) e*
- *Se $p \in \alpha$, existe $r \in \alpha$ com $p < r$ (α não tem um maior elemento).*

Observação

Os cortes foram inventados em 1872 pelo matemático alemão chamado Julius Wilhelm Richard Dedekind que viveu de 06.10.1831 a 12.02.1916)

Exemplo

Se $q \in \mathbb{Q}$ *definimos* $q^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < q\}$. *Então* q^* *é um corte que chamamos de racional. Os cortes que não são racionais serão chamados irracionais.*

$\sqrt{2} = \{p \in \mathbb{Q} : p \leqslant q \text{ com } 0 < q \text{ e } q^2 < 2\}$ *é irracional.*

Observação

Note que:

Se α é um corte, $p \in \alpha$ e $q \notin \alpha$, então $p < q$.

Se α é um corte, $r \notin \alpha$ e $r < s$, então $s \notin \alpha$.

Definição

Diremos que $\alpha < \beta$ se $\alpha \subsetneq \beta$

Proposição

Se α, β, γ *são cortes*

- $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$ *implica que* $\alpha < \gamma$.
- *Exatamente uma das seguintes relações é válida:* $\alpha < \beta$ *ou* $\alpha = \beta$ *ou* $\beta < \alpha$.
- *Todo subconjunto não vazio e limitado superiormente de* $\mathbb{R}$ *tem supremo.*
- *Entre dois números reais distintos existe um racional.*

Definição

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definimos $\alpha + \beta$ como o conjunto de todos os racionais da forma $r + s$ com $r \in \alpha$ e $s \in \beta$.

$0^* = \{s \in \mathbb{Q} : s < 0\}$

Proposição

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ existe um único $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha + \beta = 0^*$. O corte β assim definido é denotado por $-\alpha$.

Prova: É fácil ver que

$-\alpha = \{-p \in \mathbb{Q} : p - r \notin \alpha \text{ para algum } r \in \mathbb{Q},\ r > 0\}.$ □

Definição

Se α, β *são cortes,*

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} \{p \in \mathbb{Q} : \exists\ 0 < r \in \alpha \text{ e } 0 < s \in \alpha \text{ tais que } p \leqslant rs\},\ \alpha, \beta > 0^* \\ \alpha \cdot 0^* = 0^*,\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ (-\alpha)(-\beta) \text{ se } \alpha, \beta < 0^* \\ -[(-\alpha)\beta] \text{ se } \alpha < 0^* \text{ e } \beta > 0^* \\ -[\alpha(-\beta)] \text{ se } \alpha > 0^* \text{ e } \beta < 0^* \end{cases}$$

$1^* = \{s \in \mathbb{Q} : s < 1\}$.

Se $\alpha > 0$, $\alpha^{-1} = \{p \in \mathbb{Q} : p \leqslant \frac{1}{q}$ *e existe* $r > 0$ *tal que* $q - r \notin \alpha\}$
e, se $\alpha < 0$, $\alpha^{-1} = -(-\alpha)^{-1}$

Denotamos o conjunto dos números reais por $\mathbb{R}$. Temos $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ e um número real que não é racional é dito **irracional** ($\sqrt{2}$ é irracional).

Teorema

A quádrupla $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ *satisfaz as condições (A1) a (A4), (M1) a (M4), (D), (O1) a (O4), (OA) e (OM) como na seção anterior e portanto é um corpo ordenado. Além disso* $\mathbb{R}$ *é completo.*

Exercício (Entregar)

Mostre as propriedades (A1), (A2), (M1), (M2), (D), (O1) a (O4), (OA) e (OM)

Equações e Inequações

Para resolver uma equação ou inequação em x é necessário encontrar o conjunto dos números reais x que satisfazem a equação ou inequação.

Exercício (Entregar)

Resolva a inequação $-3(4-x) \leqslant 12$.

Resolução: Multiplicando ambos os lados da desigualdade por $\frac{1}{3}$, temos $-4+x \leqslant 4$. Somando 4 a ambos os lados resulta $x \leqslant 8$. As operações realizadas podem ser invertidas e $-3(4-x) \leqslant 12$ se, e somente se, $x \leqslant 8$. $\square$

Exercício (Entregar)

Resolva a inequação $\pi x + 1729 < 4x + 1$.

Resolução: Vamos começar adicionando o oposto de $1729 + 4x$ dos dois lados da inequação. Assim

$$\pi x + 1729 - 1729 - 4x < 4x + 1 - 1729 - 4x$$

ou seja $\pi x - 4x < 1 - 1729$ que também pode ser escrita como

$$(\pi - 4)x < -1728.$$

Agora multiplicaremos a última inequação pelo inverso de $\pi - 4$, que é negativo. Obtemos, então, $x > -\frac{1728}{\pi - 4}$ ou seja $x > \frac{1728}{4 - \pi}$. $\square$

Exercício (Entregar)

Qual é o sinal de $\dfrac{x+1}{1-x}$ *em função de* x*?*

Resolução: O numerador é positivo quando $x > -1$, negativo quando $x < -1$ e zero quando $x = -1$. O denominador é positivo quando $x < 1$, negativo quando $x > 1$ e zero quando $x = 1$. Portanto a fração será positiva quando $-1 < x < 1$, negativa quando $x < -1$ ou $x > 1$ e zero quando $x = -1$. $\square$

Módulo de um Número Real

Definição

Seja $x \in \mathbb{R}$. O **módulo** *ou valor absoluto de x é dado por*

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Segue da definição acima que $|x| \geqslant 0$ e $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo

Mostre que $|x|^2 = x^2$*, ou seja, o quadrado de um número real não muda quando trocamos o seu sinal.*

Exemplo

A equação $|x| = r$*, com* $r \geqslant 0$*, tem como soluções os elementos do conjunto* $\{r, -r\}$*.*

O resultado do Exemplo 3 pode ser generalizado como no exemplo seguinte.

Exemplo

A equação $|ax - b| = r$, com $r \geqslant 0$ e $a \neq 0$, tem como soluções os elementos do conjunto $\left\{ \dfrac{b+r}{a}, \dfrac{b-r}{a} \right\}$.

Exemplo

Resolva a equação $|2x + 1| = 3$.

Resolução: Temos $2x + 1 = 3$ ou $2x + 1 = -3$, o que nos leva à solução $x = 1$ ou $x = -2$. $\square$

Distância

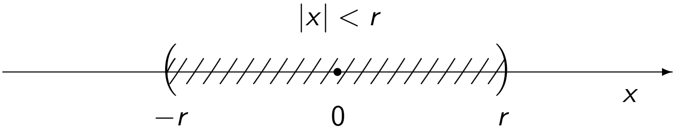
Sejam P e Q dois pontos da reta real de abscissas x e y respectivamente. Então a **distância** de P a Q (ou de x a y) é dada por $|x - y|$. Assim $|x - y|$ é a **medida** do segmento PQ. Em particular, como $|x| = |x - 0|$, então $|x|$ é a distância de x a 0.

O próximo exemplo diz que a distância de x a 0 é menor do que r, com $r > 0$, se e somente se x estiver entre $-r$ e r.

Exemplo

Seja com $r > 0$. *Então* $|x| < r \iff -r < x < r$.

A seguinte figura ilustra o significado geométrico do exemplo.



O intervalo $(-r, r)$ é o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}$ que distam de 0 menos que r (bola de raio r em torno de 0).

Agora, vamos generalizar o Exemplo acima.

Exemplo

Resolva a inequação $|ax-b|<r$ *na variável* x*, com* $r>0$ *e* $a\neq 0$*.*

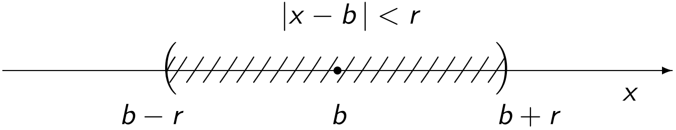
Resolução: De forma similar ao exemplo anterior, $-r<ax-b<r$. Somando b aos termos da inequação obtemos

$$b-r<ax<b+r.$$

Logo,

$$a>0 \implies \frac{b-r}{a}<x<\frac{b+r}{a};$$
$$a<0 \implies \frac{b+r}{a}<x<\frac{b-r}{a}.\square$$

No caso particular $a = 1$, se a distância de x a b for menor do que r, isto é, $|x - b| < r$, $r > 0$, então x estará entre $b - r$ e $b + r$. Geometricamente,



Exemplo

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, *vale*

$$\boxed{|\, xy| = |\, x| \; |\, y|\,.}$$

Exemplo (Desigualdade triangular)

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, *vale*

$$\boxed{|\, x + y| \leqslant |\, x| + |\, y|\,.}$$

Resolução: Somando $-|\, x| \leqslant x \leqslant |\, x|$ e $-|\, y| \leqslant y \leq |\, y|$ obtemos $-|\, x| - |\, y| \leqslant x + y \leqslant |\, x| + |\, y|.\square$

Exercício

Descreva o valor de $|x+1|+|x-1|$ *sem utilizar o módulo.*

Se $x \geqslant 1$, então $\begin{cases} |x+1| = x+1 \\ |x-1| = x-1 \end{cases}$ e, portanto,

$|x+1|+|x-1| = x+1+x-1 = 2x.$

Se $-1 \leqslant x < 1$, então $\begin{cases} |x+1| = x+1 \\ |x-1| = -x+1 \end{cases}$ e, portanto,

$|x+1|+|x-1| = x+1-x+1 = 2.$

Se $x < -1$, então $\begin{cases} |x+1| = -x-1 \\ |x-1| = -x+1 \end{cases}$ e, portanto,

$|x+1|+|x-1| = -x-1-x+1 = -2x.$

Logo $|x+1|+|x-1| = \begin{cases} 2x, & x \geqslant 1 \\ 2, & -1 \leqslant x < 1 \\ -2x, & x < -1. \end{cases}$