Pontos isolados, pontos de acumulação e funções
Aula 06

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

28 de Agosto de 2023

Segundo Semestre de 2023
Turma 2022113

Vizinhança, Pontos Isolados e Pontos de Acumulação

Definição (Vizinhança)

Uma **vizinhança** *de* $a \in \mathbb{R}$ *é qualquer intervalo aberto da reta contendo* a.

Exemplo (δ-vizinhança)

Se $\delta > 0$, $V_\delta(a) := (a - \delta\,,\ a + \delta)$ *é uma vizinhança de* $a \in \mathbb{R}$ *e é chamada* $\delta-$*vizinhança.*

Definição (Ponto de Acumulação)

Sejam $A \subset \mathbb{R}$ *e* $b \in \mathbb{R}$. *Se, para todo* $\delta > 0$, *existe* $a \in V_\delta(b) \cap A$, $a \neq b$, *então* b *será dito* **ponto de acumulação** *de* A.

Exercício (Entregar dia 11/09)

(a) *O conjunto dos pontos de acumulação de* (a, b) *é* $[a, b]$.

(b) *Seja* $B = \mathbb{Z}$. *Então* B *não tem pontos de acumulação.*

(c) *Subconjuntos finitos de* $\mathbb{R}$ *não têm pontos de acumulação.*

(d) *O conjunto dos pontos de acumulação de* $\mathbb{Q}$ *é* $\mathbb{R}$.

(e) *O conjunto dos pontos de acumulação de* $\mathbb{I}$ *é* $\mathbb{R}$.

Definição (Ponto isolado)

Seja $B \subset \mathbb{R}$. *Um ponto* $b \in B$ *será dito um* **ponto isolado** *de* B, *se existir* $\delta > 0$ *tal que* $V_\delta(b)$ *não contém pontos de* B *distintos de* b.

Exercício (Entregar dia 11/09)

(a) *Seja* $B = \{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$. *Então o conjunto dos pontos de acumulação de* B *é* $\{0\}$ *e o conjunto dos pontos isolados de* B *é o próprio conjunto* B.

(b) *O conjunto* $\mathbb{Z}$ *possui apenas pontos isolados.*

Observação:

Existem conjuntos infinitos que não possuem pontos de acumulação (por exemplo $\mathbb{Z}$).

Todo conjunto infinito e limitado possui ao menos um ponto de acumulação (veja proposição a seguir).

Proposição (Bolzano-Weierstrass)

Se A é um subconjunto infinito e limitado de $\mathbb{R}$ então, A possui pelo menos um ponto de acumulação.

Prova: Se $A\subset[-L,L]$ e $[a_n,b_n], n\in\mathbb{N}$ escolhidos de modo que: $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$, $n\in\mathbb{N}$, $b_0=-a_0=L$, $b_n-a_n=2L/2^n$, $n\in\mathbb{N}^*$ e $[a_n,b_n]$ contém infinitos elementos de A. Seja $a=\sup\{a_n: n\in\mathbb{N}\}$.

Note que $[a_n,b_n]\subset[a_j,b_j]$, $j\leqslant n$ e $[a_j,b_j]\subset[a_n,b_n]$, $j>n$. Em qualquer dos casos $a_n\leqslant b_j$ para todo $j\in\mathbb{N}$. Logo $a\leqslant b_j$, $j\in\mathbb{N}$.

Segue que $a_n\leqslant a=\sup\{a_n: n\in\mathbb{N}\}\leqslant b_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, e $a\in\bigcap_{n\geqslant 1}[a_n,b_n]$.

Dado $\delta>0$ escolha $n\in\mathbb{N}$ tal que $2L/2^n<\delta$. Seque que $a\in[a_n,b_n]$ $\subset(a-\delta,a+\delta)=V_\delta(a)$ e a é ponto de acumulação de A.$\square$

Funções - Noções Gerais

O principal objetivo do cálculo é o estudo das funções. As funções surgem para expressar uma quantidade em termos de outra.

Por exemplo, a área A de um círculo depende de seu raio r. A lei que relaciona r com A é dada por $A = \pi r^2$, neste caso diremos que A é uma função de r.

Outros exemplos são, a população P de uma determinada espécie que depende do tempo t, o custo C de envio de um pacote pelo correio que depende de seu peso w.

Definição (Função)

Dados dois conjuntos $A, B \neq \emptyset$, *uma* **função** f *de* A *em* B *(escreveremos* $f : A \to B$ *) é uma lei ou regra que a cada* $x \in A$, *associa um único elemento* $f(x) \in B$. *Adotaremos a seguinte terminologia*

A é chamado **domínio** *de f ;*

B é chamado **contra-domínio** *de f ;*

o conjunto

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in B \,;\, y = f(x),\ x \in A\}\,.$$

é chamado **imagem** *de f .*

Notações alternativas. Seja $f : A \to B$ uma função. Podemos denotar

$D_f = D(f) = A$ para o domínio de f;

$f(D_f) := \text{Im}(f)$ para a imagem de f.

Também podemos descrever a ação de f ponto a ponto como

$$A \ni x \ \mapsto \ f(x) \in B\,.$$

Convenção: Se o domínio da função não é dado explicitamente, então, por convenção, adotamos como domínio o conjunto de todos os números reais x para os quais a regra $f(x)$ esteja definida.

Definição (Gráfico)

Sejam $f : A \to B$ uma função e $A, B \subset \mathbb{R}$. O conjunto

$$G(f) = G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

é chamado **gráfico** *de f.*

Decorre da definição que $G(f)$ é o lugar geométrico descrito pelos pontos da forma $(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, quando x percorre o domínio D_f.

Observe que, por exemplo, uma circunferência não representa o gráfico de uma função.

Exemplo

Considere as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dadas por:*

(a) **função constante**: $f(x) = k$;

(b) **função identidade**: $f(x) = x$;

(c) **função linear**: $f(x) = ax$;

(d) **função afim**: $f(x) = ax + b$;

(e) **função polinomial**:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i;$$ *em particular,*

se $n = 2$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ *é uma* **função quadrática**,
se $n = 3$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *é uma* **função cúbica**;

(f) **função racional**: $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, *onde* $p(x)$ *e* $q(x)$ *são funções polinomiais. Note que* $D_f = \{x \in \mathbb{R}\,;\ q(x) \neq 0\}$;

(g) **função potência**: *$f(x) = x^a$, onde a é uma constante; em particular,*
se $a = \dfrac{1}{n}, f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$, onde n é um inteiro positivo, é uma **função raiz**; *temos que $D_f = [0, +\infty)$ se n é par e $D_f = \mathbb{R}$ se n é ímpar;*

(h) **função algébrica**: *função construída como solução de uma equação polinomial da forma*

$$p_0(x)y^n + p_1(x)y^{n-1} + \cdots + p_n(x) = 0,$$

($p_0, p_1, \cdots, p_n$ polinômios) como, por exemplo,

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1},\ D_f = \mathbb{R},$$

$$g(x) = \frac{(x-4)}{x^4 + \sqrt{2x}} \sqrt[3]{x+1},\ D_g = (0, +\infty).$$

Definição

Sejam $f : A \to B$ *e* $D \subset A$. *Denotamos por* $f\big|_D$ *a* **restrição** *de* f *ao subconjunto* D *de* A. *Então*

$$f\big|_D(x) = f(x), \quad \textit{para todo} \;\; x \in D.$$

Observação: Seja $D \subset \mathbb{R}$. Denotaremos por $I_D : D \to D$ a **função identidade** definida por $I_D(x) = x$ para todo $x \in D$.

Exemplo

Função definida por partes: *definida por regras diferentes em distintas partes de seu domínio; por exemplo,*

$$(a)\ f(x) = \begin{cases} 1 - x & se\ x \leq 1, \\ x^2 & se\ x > 1; \end{cases}$$

$$(b)\ g(x) = |x| = \begin{cases} x & se\ x \geqslant 0, \\ -x & se\ x < 0. \end{cases}$$

Exemplo (Modelagem)

Um fabricante de refrigerante quer produzir latas cilíndricas para seu produto. A lata dever ter um volume de 360 ml. Expresse a área superficial total da lata em função do seu raio e dê o domínio da função.

Solução: Seja r o raio da lata e h a altura. A área superficial total (topo, fundo e área lateral) é dada por

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Sabemos que o volume $V = \pi r^2 h$ deve ser de 360 ml, temos

$$\pi r^2 h = 360,$$

ou seja $h = 360/\pi r^2$. Portanto,

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r 360/\pi r^2 = 2\pi r^2 + 720/r.$$

Como r só pode assumir valores positivos, $D_S = (0, +\infty)$.

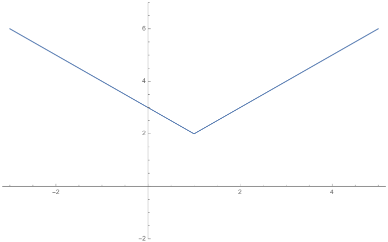
Translação e o Esboço de Gráficos

Exemplo (Translação)

Esboce o gráfico de $f(x) = |x-1| + 2$.

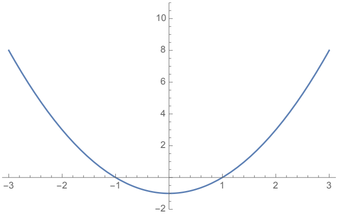
Eliminando o módulo, temos $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geqslant 1, \\ 3-x & \text{se } x < 1. \end{cases}$

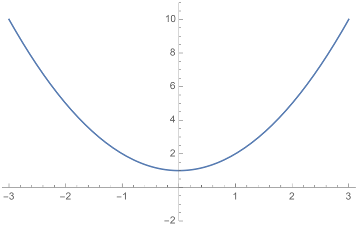
Desenhar o gráfico.



Exemplo

Esboce os gráficos de $f(x) = x^2 - 1$ *e* $g(x) = x^2 + 1$.





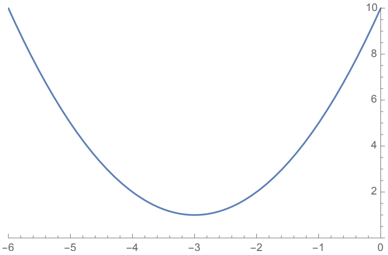
Gráficos e a translação:

- $f(x)+k$ translada o gráfico de f, k unidades *para cima* se $k > 0$ e $|k|$ unidades *para baixo* se $k < 0$,
- $f(x+k)$ translada o gráfico de f, k unidades *para a esquerda* se $k > 0$ e $|k|$ unidades *para a direita* se $k < 0$.

Exemplo

Esboce o gráficos de $f(x) = x^2 + 6x + 10$.

Completando o quadrado, escrevemos $f(x) = (x+3)^2 + 1$. Logo, o gráfico é a parábola $y = x^2$ deslocada 3 unidades para esquerda e então uma unidade para cima.

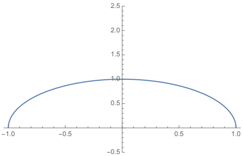


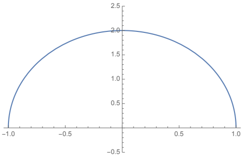
Dilatação e o Esboço de Gráficos

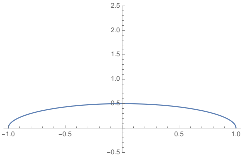
Exemplo (Dilatação em y)

Considere as funções

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad g(x) = 2f(x) \qquad h(x) = \frac{1}{2}f(x)$$



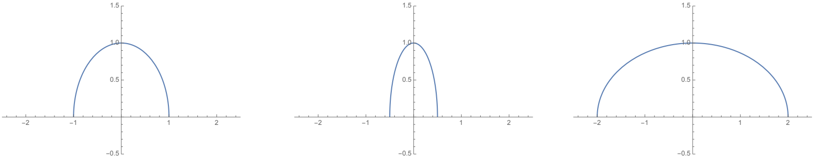




Exemplo (Dilatação em x)

Considere as funções

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad g(x) = f(2x) \qquad h(x) = f(x/2)$$



Note que $g(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$ e $h(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}$

Resumo das propriedades

Os exemplos anteriores ilustram o seguinte:

Seja $k > 1$

- $kf(x)$ dilata o gráfico de f por um fator k *no eixo* y
- $\frac{1}{k}f(x)$ contrai o gráfico de f por um fator $1/k$ *no eixo* y
- $f(kx)$ contrai o gráfico de f por um fator $1/k$ *no eixo* x
- $f(x/k)$ dilata o gráfico de f por um fator k *no eixo* x