Funções - Aula 07

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

30 de Agosto de 2023

Segundo Semestre de 2023
Turma 2023201

Reflexões e Esboço de Gráficos

Note que:

- O ponto $(a, -b)$ é a reflexão de (a, b) em relação ao eixo x.
- O ponto (a, b) é a reflexão de $(-a, b)$ em relação ao eixo y.
- Se refletimos o ponto (a, b) em relação ao eixo x, e depois em relação ao eixo y, produzimos o ponto $(-a, -b)$, que é a reflexão do ponto (a, b) em relação à origem $(0, 0)$.

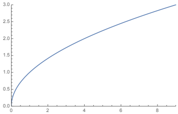
Propriedades da reflexão

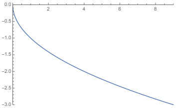
- $g(x) = -f(x)$ reflete o gráfico de f relativamente *ao eixo x*
- $g(x) = f(-x)$ reflete o gráfico de f relativamente *ao eixo y*
- $g(x) = -f(-x)$ reflete o gráfico de f relativamente *à origem*

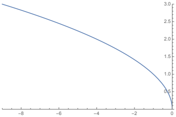
Exemplo (Reflexão)

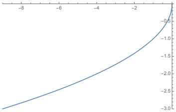
Considere as funções

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad g(x) = -\sqrt{x} \qquad h(x) = \sqrt{-x} \qquad j(x) = -\sqrt{-x}$$









Funções com simetria

No que segue, consideraremos $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição (Funções Pares e Ímpares)

Diremos que

$$f \text{ é } \textbf{par} \iff f(-x) = f(x),\ \forall\ x \in D_f\,;$$

$$f \text{ é } \textbf{ímpar} \iff f(-x) = -f(x),\ \forall\ x \in D_f\,.$$

Observação: Geometricamente,

- o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y e
- o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

Exemplo

$f(x) = x^2$ é par;

a função identidade $I(x) = x$ é ímpar;

$f(x) = 2x - x^2 = x(2 - x)$ não é par nem ímpar.

Exercício: Determine se f é par, ímpar ou nenhuma das duas:

(a) $f(x) = x^5 + x$,

(b) $f(x) = 1 - x^4$,

(c) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$.

Soma, Produto e Quociente de Funções

Definição (Soma, Produto e Quociente)

Dadas duas funções $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$, podemos definir as operações:

soma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ x \in D_{f+g} = D_f \cap D_g;$

produto: $(fg)(x) = f(x)g(x),\ x \in D_{fg} = D_f \cap D_g;$

quociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)},\quad x \in D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0\}.$

Exemplo

Se $f(x) = \sqrt{7-x}$ *e* $g(x) = \sqrt{x-2}$, *então*

$$D_f = (-\infty, 7],$$
$$D_g = [2, +\infty),$$
$$D_f \cap D_g = [2, 7].$$

Logo,

$$(a)\ \ (f+g)(x) = \sqrt{7-x} + \sqrt{x-2}, \quad 2 \leq x \leq 7,$$

$$(b)\ \ (fg)(x) = \sqrt{7-x}\sqrt{x-2} = \sqrt{(7-x)(x-2)}, \quad 2 \leq x \leq 7,$$

$$(c)\ \ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{\frac{7-x}{x-2}}, \quad 2 < x \leq 7.$$

Composição

Definição (Composição)

Dadas funções $f : D_f \to \mathbb{R}$ *e* $g : D_g \to \mathbb{R}$, *definimos a* **função composta**

$$h : D_{g \circ f} \to \mathbb{R}$$

por

$$h(x) = g(f(x)), \quad \forall\, x \in D_{g \circ f},$$

onde $D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$. *Neste caso, escrevemos* $h = g \circ f$.

Exemplo

Se $f(x) = 2x + 1$ *e* $g(x) = x^2 + 3x$, *então*

(a) $g \circ f(x) = g(2x+1) = (2x+1)^2 + 3(2x+1) = 4x^2 + 10x + 4$,

(b) $f \circ g(x) = f(x^2 + 3x) = 2(x^2 + 3x) + 1 = 2x^2 + 6x + 1$.

Observação: Em geral, $f \circ g \neq g \circ f$.

Exemplo

Encontre $f \circ g \circ h$ *se* $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $g(x) = x^{10}$ *e* $h(x) = x + 3$.

Solução:

$$f \circ g \circ h(x) = f(g(h(x))) = f(g(x+3)) = f((x+3)^{10}) = \frac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1}.$$

Exercício: Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$, encontre e determine o domínio das funções:

$$(a)\ f \circ g(x) = \sqrt[4]{2-x},\ D_{f \circ g} = (-\infty, 2]$$
$$(b)\ g \circ f(x) = \sqrt{2-\sqrt{x}},\ D_{g \circ f} = [0, 4]$$
$$(c)\ f \circ f(x) = \sqrt[4]{x},\ D_{f \circ f} = [0, +\infty)$$
$$(d)\ g \circ g(x) = \sqrt{2-\sqrt{2-x}},\ D_{g \circ g} = [-2, 2].$$

Funções Inversas

Definição

Uma função $f : A \to B$ será dita **invertível**, *se existir $g : B \to A$ (denotada por f^{-1}) tal que $g \circ f = I_A$ e $f \circ g = I_B$.*

Proposição

Uma função $f : A \to B$ é invertível se, e somente se, é bijetora.

De fato: Mostremos que se f é invertível então f é bijetora.
(1) $f(x)=f(y) \Rightarrow x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(y)) = y$ (f é injetora)
(2) Se $b \in B$ e $a = f^{-1}(b) \Rightarrow f(a) = f \circ f^{-1}(b) = b$ (f é sobre).
Agora mostremos que se $f : A \to B$ é bijetora então f é invertível. Dado $b \in B$, como f é bijetora, existe um único $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Defina $f^{-1}(b) := a$. Assim, $f(f^{-1}(b)) = f(a) = b$, para todo $b \in B$, e $f^{-1}(f(a)) = a$, para todo $a \in A$.$\square$

Neste caso, a **função inversa** está definida por

$$\boxed{f^{-1}(y) = x \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = y, \quad \forall\, y \in B.}$$

$$D(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f) \ \text{ e } \ \mathrm{Im}(f^{-1}) = D(f)$$

Exemplo

A função $f(x) = x^3$ é injetora e a inversa de f sobre sua imagem é a função que denotamos por $f^{-1}(x) = x^{1/3}$.

De fato: Mostremos a injetividade de $f(x) = x^3$. Note que:

$$0 \leq (x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2 \text{ implica que } |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Logo

- $x^2 + xy + y^2 \geq x^2 - |xy| + y^2 \geq \dfrac{x^2 + y^2}{2}$ e
- $x^2 + xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

Logo $f(x) - f(y) = x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 0$ implica que $x = y$ e f é injetora. Segue que f é bijetora sobre sua imagem.

Mostre que, se $f(x) = x^3$, $\mathrm{Im}(f)$ não é limitada superiormente nem inferiormente. Mostraremos mais tarde que isto implica que $f(x) = x^3$ é sobrejetora.

Alerta: Não confunda $f^{-1}(x)$ com $\dfrac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1}$.

Para achar a função inversa:

(1) Escreva $y = f(x)$.

(2) Resolva essa equação para x em termos de y.

(3) Troque x por y para expressar f^{-1} como função de x.

Exemplo

Calcule f^{-1} para a função $f(x) = 1 + 3x$ $(A = B = \mathbb{R})$.

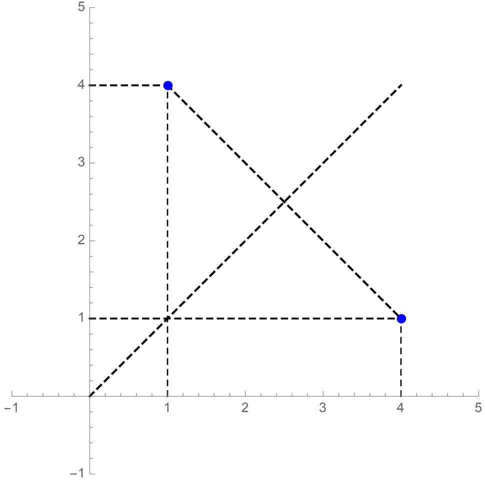
Solução: Escrevemos $y = 1 + 3x$. Resolvemos para encontrar x como função de y, ou seja, $x = \dfrac{y-1}{3}$. E substituindo y por x, obtemos

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}.$$

Exercício: Determine, quando possível, a função inversa de:

$$(a)\ f(x) = x^2; \qquad (b)\ f(x) = x^3 + 2.$$

Observação: Note que o ponto (b, a) é a reflexão do ponto (a, b) em torno da reta $y = x$.



Observação: Note que

$$G(f^{-1}) = \left\{(y, f^{-1}(y)) : y \in B\right\} = \{(f(x), x) : x \in A\} \ .$$

Segue da observação anterior que $G(f^{-1})$ é a reflexão de $G(f)$ em torno da reta $y = x$.

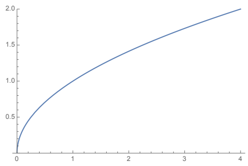
Exemplo: Esboce os gráficos de $f(x) = \sqrt{-x-1}$ e de sua inversa.

Solução 1: Se $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = \sqrt{-x}$, então $f(x) = h(x+1)$.

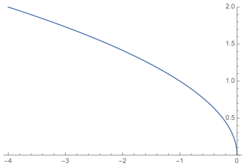
Logo, G_h é a reflexão de G_g em torno do eixo y.

Por sua vez, G_f é G_h transladado de uma unidade para a esquerda.

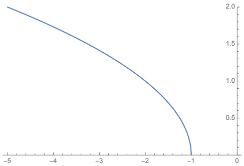
$g(x) = \sqrt{x}$



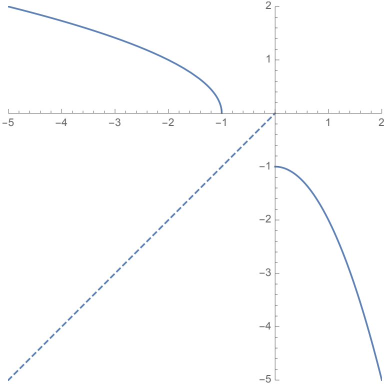
$h(x) = \sqrt{-x}$



$f(x) = \sqrt{-x-1}$



A ilustração a seguir mostra o gráfico de f e de sua inversa f^{-1}. Note que $G(f^{-1})$ é a reflexão de $G(f)$ em torno da reta $y = x$.



Critério de Invertibilidade: A reflexão do gráfico em torno da diagonal é um gráfico.

Exemplo: Esboce os gráficos de $f(x) = \sqrt{-x-1}$ e de sua inversa.

Solução 2: Vamos primeiro encontrar a fórmula explícita para f^{-1}. Veremos que esta é uma função que conhecemos muito bem o seu gráfico e, portanto, poderemos construir também o gráfico de f.

Primeiramente, observe que

$$D(f) = \mathrm{Im}(f^{-1}) = (-\infty, -1] \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(f) = D(f^{-1}) = [0, \infty).$$

Para calcular f^{-1}: Escrevemos $y = \sqrt{-x-1}$. Resolvemos para encontrar x como função de y: elevando ao quadrado $x = -y^2 - 1$. Substituindo y por x, obtemos

$$f^{-1}(x) = -x^2 - 1, \quad x \in [0, \infty).$$

Desta forma, fica fácil obter os gráficos da página anterior.

Funções Monótonas

Definição

Se valer a implicação $x > y \Longrightarrow f(x) > f(y)$, *então* f *será* **estritamente crescente**.

Se valer a implicação $x \geqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$, *então* f *será* **crescente**.

Se valer a implicação $x > y \Longrightarrow f(x) < f(y)$, *então* f *será* **estritamente decrescente**.

Se valer a implicação $x \geqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$, *então* f *será* **decrescente**.

Definição

Se $f : A \to B$ satisfizer uma das condições da Definição anterior, diremos que f é uma função **monótona** *ou* **monotônica**.

Exemplo

$f(x) = x^2$ *é estritamente crescente para* $x > 0$ *e estritamente decrescente para* $x < 0$.

De fato: *Note que* $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. *Assim,*

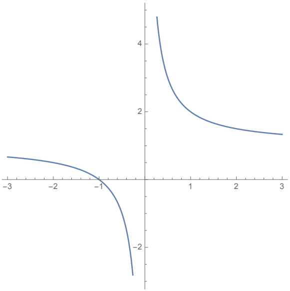
- *Se x, y são ambos positivos temos que $x > y$ implica $x^2 > y^2$ (estritamente crescente) e*
- *Se x, y são ambos negativos $x > y$ implica $x^2 < y^2$ (estritamente decrescente).*

Exemplo

$f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ *é decrescente em* $(-\infty, 0)$ *ou em* $(0, \infty)$ *mas não é monótona em* $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Observe que se x e y tiverem o mesmo sinal e $x > y$, então

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{y} = f(y).$$



Funções Limitadas

Definição

Diremos que f é **limitada** *se, e somente se, $\mathrm{Im}(f) = f(D_f) \subset \mathbb{R}$ for limitado. Caso contrário, a função f será dita* **ilimitada**. *Se $A_1 \subset D_f$, então f será* **limitada em A_1** *se, e somente se, a restrição $f|_{A_1}$ for limitada, isto é, $f(A_1) \subset \mathbb{R}$ for limitada.*

Observação: Da definição acima, f será limitada, se e somente se, existir $L > 0$ tal que

$$|f(x)| \leqslant L, \quad \forall\, x \in D_f,$$

ou, equivalentemente, se $\exists\ L,\ l \in \mathbb{R}$ tais que

$$l \leqslant f(x) \leqslant L, \quad \forall\, x \in D_f.$$

Exemplo

(a) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ *é limitada;* (*só assume os valores* 1 *e* -1)

(b) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^4+1}$ *é limitada;* ($0 \leqslant f(x) \leqslant 1$).

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *é ilimitada;* (*Dado* $L>0$, $\exists\ n \in \mathbb{N}^*$ *tal que* $x = \frac{1}{n} < \frac{1}{L}$).

(d) $f(x) = x^3$ *é ilimitada* (*Dado* $L>0$, $\exists\ n \in \mathbb{N}^*$ *tal que* $\frac{1}{n^3} < \frac{1}{n} < \frac{1}{L}$).

Definição

Diremos que:

- $\sup(f) = \sup\{f(x) : x \in D_f\} = \sup(\mathrm{Im}(f))$.
- $\inf(f) = \inf\{f(x) : x \in D_f\} = \inf(\mathrm{Im}(f))$.
- *Se* $\sup(f) = f(x_0)$ *para algum* $x_0 \in D_f$, *então diremos que* $f(x_0)$ *é o* **máximo** *de* f *ou o* **valor máximo** *de* f. *O ponto* x_0 *será chamado* **ponto de máximo** *de* f.
- *Se* $\inf(f) = f(x_0)$ *para algum* $x_0 \in D_f$, *então diremos que* $f(x_0)$ *é o* **mínimo** *de* f *ou o* **valor mínimo** *de* f. *O ponto* x_0 *será chamado* **ponto de mínimo** *de* f.

Funções Periódicas

Definição

Seja $\omega \neq 0$. *Então* f *será dita* **periódica** *com* **período** ω *ou* ω-**periódica** *se, e somente se, tivermos*

$$f(x) = f(x + \omega), \ \forall \, x \in D_f .$$

Em particular, se existir um menor ω_0 *número positivo tal que* f *seja* ω_0*-periódica, diremos que* ω_0 *será o* **período mínimo** *de* f.

Proposição

Sejam $c \neq 0 \neq \omega$. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for ω-periódica, então serão válidas as afirmações:

(a) *f é $n\omega$-periódica, $\forall n \in \mathbb{Z}$, com $n \neq 0$.*

(b) *$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(cx)$ é ω/c-periódica.*

Prova: a) Observe que, se f é $\bar{\omega}$ periódica,

$$f(x-\bar{\omega}) = f(x) = f(x+\bar{\omega}), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim, basta provar o caso $n \in \mathbb{N}^*$. Faremos a prova por indução.

Sabemos que $f(x+\omega) \overset{(p)}{=} f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponhamos que $f(x+(n-1)\omega) \overset{(i)}{=} f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e para algum $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

Logo, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+n\omega) = f(x+\omega+(n-1)\omega) \overset{(i)}{=} f(x+\omega) \overset{(p)}{=} f(x).$$

b) Note que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$g\left(x+\frac{\omega}{c}\right) = f\left(c\left(x+\frac{\omega}{c}\right)\right) = f(cx+\omega) \underbrace{=}_{f \text{ é } \omega-\text{periódica}} f(cx) = g(x).$$

Exemplo

Considere $f(x) = x - [x]$, *em que* $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant x\}$ *é a função maior inteiro menor ou igual a* x. *Então* f *é 1-periódica e o período mínimo de* f *é 1. Faça o gráfico de* f

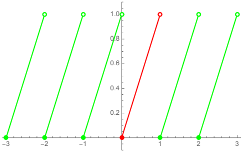
Solução: Primeiramente provemos que $[x+1]=[x]+1$. De fato,

$$[x]\leq x \ \text{ e } \ [x]+1>x \Longrightarrow [x]+1\leq x+1 \ \text{ e } \ ([x]+1)+1>x+1.$$

Agora observe que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+1) = (x+1) - [x+1] = (x+1) - ([x]+1) = x - [x] = f(x).$$

É fácil ver que 1 é o menor período. Basta fazer o gráfico de f em $[0,1)$ e repetir em cada intervalo da forma $[n-1, n)$, $n \in \mathbb{Z}\backslash\{1\}$.



Exemplo

$f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & se\ x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$ *é r-periódica* $\forall\ r \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$.

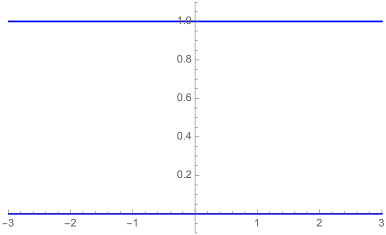
Solução: *Seja* $r \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$. *Uma vez que*

$$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x + r \in \mathbb{Q},$$

inferimos que $f(x+r) = f(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Como, dado* $\epsilon > 0$, *existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *tal que* $\mathbb{Q} \ni r_n = \frac{1}{n} < \epsilon$, f *não tem período mínimo.*

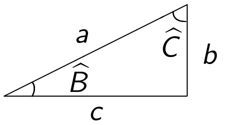
O gráfico de $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$ é o seguinte:

- a linha azul superior representa a imagem dos racionais (ela é cheia de buracos, relativos aos números irracionais);
- a linha azul inferior representa a imagem dos irracionais (ela é cheia de buracos, relativos aos números racionais).



Funções Trigonométricas

Sabemos que em um triângulo *retângulo* de hipotenusa a e ângulos agudos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ opostos, respectivamente, aos catetos b e c, temos



$$\cos\widehat{B} = \frac{c}{a}, \quad \cos\widehat{C} = \frac{b}{a},$$

$$\operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{sen}\widehat{C} = \frac{c}{a}.$$

Estas relações definem o **seno** e **cosseno** de um ângulo agudo. Note que $\operatorname{sen}\widehat{B}$ e $\cos\widehat{B}$ dependem apenas do ângulo $\widehat{B}$ e não do tamanho do triângulo.

Do Teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2 = a^2\operatorname{sen}^2\widehat{B} + a^2\cos^2\widehat{B} = a^2(\operatorname{sen}^2\widehat{B} + \cos^2\widehat{B}) \quad \text{e}$$

$$\boxed{1 = \operatorname{sen}^2\widehat{B} + \cos^2\widehat{B}.} \tag{1}$$

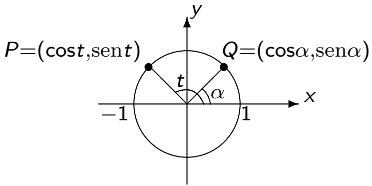
É claro que o seno e o cosseno de um ângulo agudo são números compreendidos entre 0 e 1.

A relação (1) sugere que, para todo ângulo α, os números cosα e $\mathrm{sen}\alpha$ sejam as coordenadas de um ponto da circunferência de raio 1 e centro na origem de $\mathbb{R}^2$.

Usaremos isto para estender as funções cosseno e seno para ângulos fora do intervalo $(0, \pi/2)$.

Observação: Sempre que falarmos das funções seno e cosseno os ângulos serão medidos em radianos ($\pi\, radianos = 180^{\text{o}}$).

Considerando a circunferência unitária de centro na origem do $\mathbb{R}^2$ e marcando, a partir do eixo x, um ângulo t, podemos definir $\mathrm{sen}\,t$ e $\cos t$ de forma que as coordenadas de P sejam $(\cos t, \mathrm{sen}\,t)$.



Assim, $\mathrm{sen}\,t$ e $\cos t$ coincidem com a definição original se $0 < t < \pi/2$ e podem ser estendidas para qualquer $t \in \mathbb{R}$, se marcarmos ângulos positivos no sentido antihorário e ângulos negativos no sentido horário.

Proposição (Propriedades)

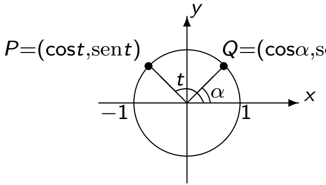
(a) *O seno é positivo no primeiro e segundo quadrantes e negativo no terceiro e quarto quadrantes.*

(b) *O cosseno é positivo no primeiro e quarto quadrantes e negativo no segundo e terceiro quadrantes.*

(c) *O seno e cosseno são funções 2π-periódicas com imagem no intervalo $[-1, 1]$.*

(d) *O cosseno é uma função par e o seno é uma função ímpar.*

(e) $\operatorname{sen}(0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ *e* $\cos(0) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.



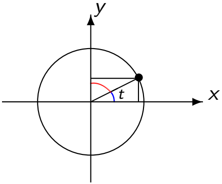
Proposição (Propriedades - via congruência de triângulos)

(f) $\operatorname{sen} t = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$ *e* $\cos t = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$.

(g) $-\operatorname{sen} t = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + t\right)$ *e* $\cos t = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + t\right)$.

(h) $\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(\pi - t)$ *e* $-\cos t = \cos(\pi - t)$.

(i) $-\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(\pi + t)$ *e* $-\cos t = \cos(\pi + t)$.



Proposição (Fórmulas de Adição)

(*a*) $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\beta)$.

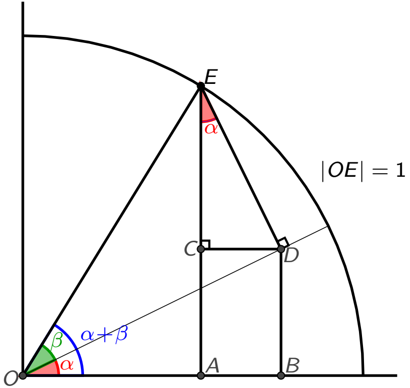
(*b*) $\mathrm{sen}(\alpha+\beta)=\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta)+\mathrm{sen}(\beta)\cos(\alpha)$.

Trocando β por $-\beta$ e utilizando a paridade das funções, obtemos

(*c*) $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\beta)$.

(*d*) $\mathrm{sen}(\alpha-\beta)=\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta)-\mathrm{sen}(\beta)\cos(\alpha)$.

Faremos apenas a prova da fórmula do cosseno da soma. O seno da soma segue desta. Basta considerar o caso $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{4})$.



Note que

$$\cos(\alpha+\beta) = |OA| = |OB| - |CD| = |OD|\cos\alpha - |ED|\text{sen}\alpha$$
$$= \cos\beta\cos\alpha - \text{sen}\beta\,\text{sen}\alpha$$

Recorde que

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$
$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)$$

Disto obtemos o seguinte resultado:

Proposição (Arco Duplo)

(*a*) $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)$.

(*b*) $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$.

Recorde que:

$$(a)\ \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 \ \text{ e}$$
$$(b)\ \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos(2\alpha).$$

Disto obtemos as fórmulas de arco metade.

Proposição (Arco Metade)

$$(a)\ \cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}, \qquad \left[\frac{(a)+(b)}{2}\right].$$

$$(b)\ \operatorname{sen}^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}, \qquad \left[\frac{(a)-(b)}{2}\right].$$

Recorde que:

$$
\begin{aligned}
(a)\ & \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)\\
(b)\ & \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)\\
(c)\ & \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)\\
(d)\ & \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)
\end{aligned}
$$

Disto obtemos as fórmulas seguintes:

Proposição (Transformação de Produto em Soma)

$$
\begin{aligned}
(a)\ & \cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta),\ \boxed{[\tfrac{(a)+(c)}{2}]}.\\
(b)\ & \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = -\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta),\ \boxed{[\tfrac{(c)-(a)}{2}]}.\\
(c)\ & \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\ \boxed{[\tfrac{(b)+(d)}{2}]}.
\end{aligned}
$$

Recorde que

$$(a)\ \cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$
$$(b)\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)+\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)$$
$$(c)\ \cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$
$$(d)\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)$$

Fazendo

$$\alpha=\frac{\alpha'+\beta'}{2},\ \beta=\frac{\alpha'-\beta'}{2}$$

obtemos as fórmulas seguintes:

Proposição (Transformação de Soma em Produto)

$(a')\ \operatorname{sen}(\alpha')+\operatorname{sen}(\beta')=2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha'+\beta'}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha'-\beta'}{2}\right).$ $\quad (a')=\frac{(b)+(d)}{2}$

$(b')\ \cos(\alpha')+\cos(\beta')=2\cos\left(\frac{\alpha'+\beta'}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha'-\beta'}{2}\right).$ $\quad (b')=\frac{(a)+(c)}{2}$

De maneira análoga obtemos as fórmulas seguintes.

Proposição (Transformação de Subtração em Produto)

(*a*) $\mathrm{sen}(\alpha') - \mathrm{sen}(\beta') = 2\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha' - \beta'}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha' + \beta'}{2}\right)$.

(*b*) $\cos(\alpha') - \cos(\beta') = -2\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha' + \beta'}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha' - \beta'}{2}\right)$.

Definição

Definimos

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\mathrm{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \quad D(\mathrm{tg}) = \{\alpha : \cos\alpha \neq 0\};$$

$$\mathrm{cotg}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\mathrm{sen}(\alpha)}, \quad D(\mathrm{cotg}) = \{\alpha : \mathrm{sen}\alpha \neq 0\};$$

$$\mathrm{cossec}(\alpha) = \frac{1}{\mathrm{sen}(\alpha)}, \quad D(\mathrm{cossec}) = \{\alpha : \mathrm{sen}\alpha \neq 0\};$$

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}, \quad D(\sec) = \{\alpha : \cos\alpha \neq 0\}$$

Exercício (Entregar em 18/09)

(1) *Dê um significado geométrico para* $\operatorname{tg}(\alpha)$, $\operatorname{cotg}(\alpha)$, $\sec(\alpha)$ *e* $\operatorname{cossec}(\alpha)$.

(2) *Esboce os gráficos das funções* tg, cotg, $\sec$ *e* cossec.

(3) *Classifique as funções trigonométricas em par, ímpar, periódica, limitada.*