Limites: Noção Intuitiva, Definição e Propriedades

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

11 de Setembro de 2023

Segundo Semestre de 2023
Turma 2023201

Funções Monótonas

Definição

Se valer a implicação $x > y \implies f(x) > f(y)$, *então* f *será* **estritamente crescente**.

Se valer a implicação $x \geqslant y \implies f(x) \geqslant f(y)$, *então* f *será* **crescente**.

Se valer a implicação $x > y \implies f(x) < f(y)$, *então* f *será* **estritamente decrescente**.

Se valer a implicação $x \geqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)$, *então* f *será* **decrescente**.

Definição

Se $f : A \to B$ satisfizer uma das condições da Definição anterior, diremos que f é uma função **monótona** *ou* **monotônica**.

Exemplo

$f(x) = x^2$ *é estritamente crescente para $x > 0$ e estritamente decrescente para $x < 0$.*

De fato: *Note que $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. Assim,*

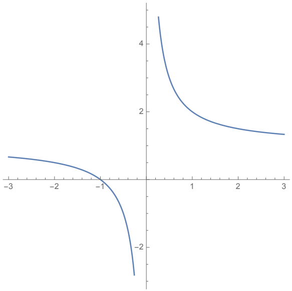
- *Se x, y são ambos positivos temos que $x > y$ implica $x^2 > y^2$ (estritamente crescente) e*
- *Se x, y são ambos negativos $x > y$ implica $x^2 < y^2$ (estritamente decrescente).*

Exemplo

$f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ *é decrescente em* $(-\infty, 0)$ *ou em* $(0, \infty)$ *mas não é monótona em* $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Observe que se x e y tiverem o mesmo sinal e $x > y$, então

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{y} = f(y).$$



Funções Limitadas

Definição

Diremos que f é **limitada** *se, e somente se,* $\mathrm{Im}(f) = f(D_f) \subset \mathbb{R}$ *for limitado. Caso contrário, a função f será dita* **ilimitada**. *Se* $A_1 \subset D_f$, *então f será* **limitada em A_1** *se, e somente se, a restrição* $f|_{A_1}$ *for limitada, isto é,* $f(A_1) \subset \mathbb{R}$ *for limitado.*

Observação: Da definição acima, f será limitada, se e somente se, existir $L > 0$ tal que

$$|f(x)| \leqslant L, \quad \forall\, x \in D_f,$$

ou, equivalentemente, se $\exists\ L,\ l \in \mathbb{R}$ tais que

$$l \leqslant f(x) \leqslant L, \quad \forall\, x \in D_f.$$

Exemplo

(a) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ *é limitada;* (*só assume os valores* 1 *e* -1)

(b) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^4+1}$ *é limitada;* $(0 \leqslant f(x) \leqslant 1)$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *é ilimitada;* (*Dado* $L > 0$, $\exists\ n \in \mathbb{N}^*$ *tal que* $x = \frac{1}{n} < \frac{1}{L}$).

(d) $f(x) = x^3$ *é ilimitada* (*Dado* $L > 0$, $\exists\ n \in \mathbb{N}^*$ *tal que* $\frac{1}{n^3} < \frac{1}{n} < \frac{1}{L}$).

Definição

Diremos que:

- $\sup(f) = \sup\{f(x) : x \in D_f\} = \sup(\mathrm{Im}(f))$.
- $\inf(f) = \inf\{f(x) : x \in D_f\} = \inf(\mathrm{Im}(f))$.
- *Se* $\sup(f) = f(x_0)$ *para algum* $x_0 \in D_f$, *então diremos que* $f(x_0)$ *é o* **máximo** *de* f *ou o* **valor máximo** *de* f. *O ponto* x_0 *será chamado* **ponto de máximo** *de* f.
- *Se* $\inf(f) = f(x_0)$ *para algum* $x_0 \in D_f$, *então diremos que* $f(x_0)$ *é o* **mínimo** *de* f *ou o* **valor mínimo** *de* f. *O ponto* x_0 *será chamado* **ponto de mínimo** *de* f.

Funções Periódicas

Definição

Seja $\omega \neq 0$. Então f será dita **periódica** *com* **período** *ω ou ω-***periódica** *se, e somente se, tivermos*

$$f(x) = f(x + \omega), \; \forall \, x \in D_f.$$

Em particular, se existir um menor ω_0 número positivo tal que f seja ω_0-periódica, diremos que ω_0 será o **período mínimo** *de f.*

Proposição

Sejam $c \neq 0 \neq \omega$. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for ω-periódica, então serão válidas as afirmações:

(a) *f é $n\omega$-periódica, $\forall n \in \mathbb{Z}$, com $n \neq 0$.*

(b) *$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(cx)$ é ω/c-periódica.*

Prova: a) Observe que, se f é $\bar{\omega}$ periódica,

$$f(x-\bar{\omega}) = f(x) = f(x+\bar{\omega}), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim, basta provar o caso $n \in \mathbb{N}^*$. Faremos a prova por indução.

Sabemos que $f(x+\omega) \overset{(p)}{=} f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponhamos que $f(x+(n-1)\omega) \overset{(i)}{=} f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e para algum $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$.

Logo, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+n\omega) = f(x+\omega+(n-1)\omega) \overset{(i)}{=} f(x+\omega) \overset{(p)}{=} f(x).$$

b) Note que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$g\left(x+\frac{\omega}{c}\right) = f\left(c\left(x+\frac{\omega}{c}\right)\right) = f(cx+\omega) \underbrace{=}_{f \text{ é } \omega-\text{periódica}} f(cx) = g(x).$$

Exemplo

Considere $f(x) = x - [x]$, em que $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant x\}$ é a função maior inteiro menor ou igual a x. Então f é 1-periódica e o período mínimo de f é 1. Faça o gráfico de f

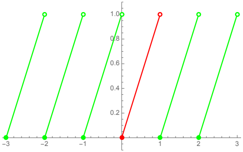
Solução: Primeiramente provemos que $[x+1]=[x]+1$. De fato,

$$[x]\leqslant x \quad \text{e} \quad [x]+1>x \Longrightarrow [x]+1\leqslant x+1 \quad \text{e} \quad ([x]+1)+1>x+1.$$

Agora observe que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+1) = (x+1) - [x+1] = (x+1) - ([x]+1) = x - [x] = f(x).$$

É fácil ver que 1 é o menor período. Basta fazer o gráfico de f em $[0,1)$ e repetir em cada intervalo da forma $[n-1, n)$, $n \in \mathbb{Z}\backslash\{1\}$.



Exemplo

$f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & se\ x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$ *é r-periódica* $\forall\ r \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$.

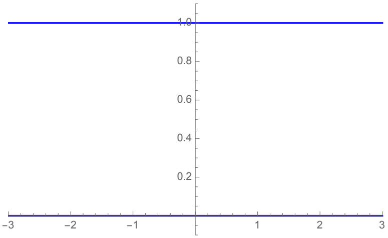
Solução: *Seja* $r \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$. *Uma vez que*

$$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x + r \in \mathbb{Q},$$

inferimos que $f(x+r) = f(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Como, dado* $\epsilon > 0$, *existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *tal que* $\mathbb{Q} \ni r_n = \frac{1}{n} < \epsilon$, *f não tem período mínimo.*

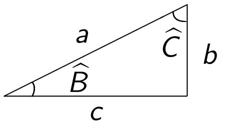
O gráfico de $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$ é o seguinte:

- a linha azul superior representa a imagem dos racionais (ela é cheia de buracos, relativos aos números irracionais);
- a linha azul inferior representa a imagem dos irracionais (ela é cheia de buracos, relativos aos números racionais).



Funções Trigonométricas

Sabemos que em um triângulo *retângulo* de hipotenusa a e ângulos agudos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ opostos, respectivamente, aos catetos b e c, temos



$$\cos\widehat{B} = \frac{c}{a}, \quad \cos\widehat{C} = \frac{b}{a},$$

$$\operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{sen}\widehat{C} = \frac{c}{a}.$$

Estas relações definem o **seno** e **cosseno** de um ângulo agudo. Note que $\operatorname{sen}\widehat{B}$ e $\cos\widehat{B}$ dependem apenas do ângulo $\widehat{B}$ e não do tamanho do triângulo.

Do Teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2 = a^2\operatorname{sen}^2\widehat{B} + a^2\cos^2\widehat{B} = a^2(\operatorname{sen}^2\widehat{B} + \cos^2\widehat{B}) \quad \text{e}$$

$$\boxed{1 = \operatorname{sen}^2\widehat{B} + \cos^2\widehat{B}.} \tag{1}$$

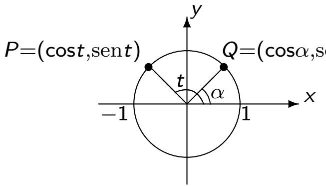
É claro que o seno e o cosseno de um ângulo agudo são números compreendidos entre 0 e 1.

A relação (1) sugere que, para todo ângulo α, os números cosα e $\mathrm{sen}\alpha$ sejam as coordenadas de um ponto da circunferência de raio 1 e centro na origem de $\mathbb{R}^2$.

Usaremos isto para estender as funções cosseno e seno para ângulos fora do intervalo $(0, \pi/2)$.

Observação: Sempre que falarmos das funções seno e cosseno os ângulos serão medidos em radianos ($\pi\, radianos = 180^{\rm o}$).

Considerando a circunferência unitária de centro na origem do $\mathbb{R}^2$ e marcando, a partir do eixo x, um ângulo t, podemos definir $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$ de forma que as coordenadas de P sejam $(\cos t, \operatorname{sen} t)$.



Assim, $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$ coincidem com a definição original se $0 < t < \pi/2$ e podem ser estendidas para qualquer $t \in \mathbb{R}$, se marcarmos ângulos positivos no sentido antihorário e ângulos negativos no sentido horário.

Proposição (Propriedades)

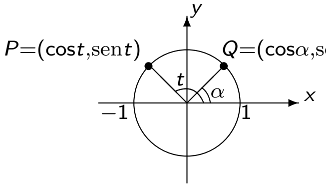
(a) *O seno é positivo no primeiro e segundo quadrantes e negativo no terceiro e quarto quadrantes.*

(b) *O cosseno é positivo no primeiro e quarto quadrantes e negativo no segundo e terceiro quadrantes.*

(c) *O seno e cosseno são funções 2π-periódicas com imagem no intervalo $[-1, 1]$.*

(d) *O cosseno é uma função par e o seno é uma função ímpar.*

(e) $\operatorname{sen}(0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ *e* $\cos(0) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.



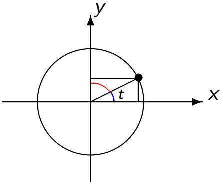
Proposição (Propriedades - via congruência de triângulos)

(f) $\mathrm{sen}\, t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ e $\cos t = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$.

(g) $-\mathrm{sen}\, t = \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$ e $\cos t = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$.

(h) $\mathrm{sen}\, t = \mathrm{sen}(\pi - t)$ e $-\cos t = \cos(\pi - t)$.

(i) $-\mathrm{sen}\, t = \mathrm{sen}(\pi + t)$ e $-\cos t = \cos(\pi + t)$.



Proposição (Fórmulas de Adição)

(a) $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\beta)$.

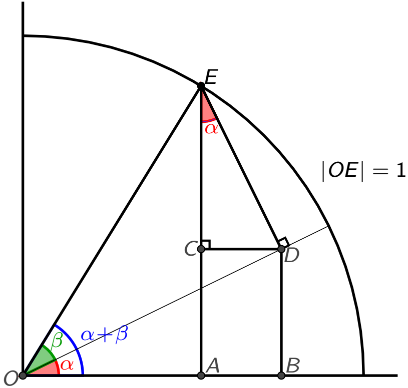
(b) $\mathrm{sen}(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \mathrm{sen}(\beta)\cos(\alpha)$.

Trocando β por $-\beta$ e utilizando que o cosseno é par e o seno é ímpar, obtemos

(c) $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\beta)$.

(d) $\mathrm{sen}(\alpha-\beta) = \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \mathrm{sen}(\beta)\cos(\alpha)$.

Faremos apenas a prova da fórmula do cosseno da soma. O seno da soma segue desta. Basta considerar o caso $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{4})$.



Note que

$$\cos(\alpha+\beta) = |OA| = |OB| - |CD| = |OD|\cos\alpha - |ED|\text{sen}\alpha$$
$$= \cos\beta\cos\alpha - \text{sen}\beta\,\text{sen}\alpha$$

Recorde que

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$
$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)$$

Disto obtemos o seguinte resultado:

Proposição (Arco Duplo)

(*a*) $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)$.

(*b*) $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$.

Recorde que:

$$(a)\ \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 \ \text{ e}$$
$$(b)\ \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos(2\alpha).$$

Disto obtemos as fórmulas de arco metade.

Proposição (Arco Metade)

$$(a)\ \cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}, \qquad \left[\frac{(a)+(b)}{2}\right].$$

$$(b)\ \operatorname{sen}^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}, \qquad \left[\frac{(a)-(b)}{2}\right].$$

Recorde que:

$$
\begin{aligned}
(a)\ & \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\beta)\\
(b)\ & \mathrm{sen}(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \mathrm{sen}(\beta)\cos(\alpha)\\
(c)\ & \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\beta)\\
(d)\ & \mathrm{sen}(\alpha-\beta) = \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \mathrm{sen}(\beta)\cos(\alpha)
\end{aligned}
$$

Disto obtemos as fórmulas seguintes:

Proposição (Transformação de Produto em Soma)

$$
\begin{aligned}
(a)\ & \cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta), \ \left[\frac{(a)+(c)}{2}\right].\\
(b)\ & \mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\beta) = -\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta), \ \left[\frac{(c)-(a)}{2}\right].\\
(c)\ & \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\mathrm{sen}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\mathrm{sen}(\alpha-\beta) \ \left[\frac{(b)+(d)}{2}\right].
\end{aligned}
$$

Recorde que

$$(a)\ \cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\beta)$$
$$(b)\ \mathrm{sen}(\alpha+\beta)=\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta)+\mathrm{sen}(\beta)\cos(\alpha)$$
$$(c)\ \cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\beta)$$
$$(d)\ \mathrm{sen}(\alpha-\beta)=\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta)-\mathrm{sen}(\beta)\cos(\alpha)$$

Fazendo

$$\alpha=\frac{\alpha'+\beta'}{2},\ \beta=\frac{\alpha'-\beta'}{2}$$

obtemos as fórmulas seguintes:

Proposição (Transformação de Soma em Produto)

$$(a')\ \mathrm{sen}(\alpha')+\mathrm{sen}(\beta')=2\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha'+\beta'}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha'-\beta'}{2}\right). \qquad (a')=\frac{(b)+(d)}{2}$$

$$(b')\ \cos(\alpha')+\cos(\beta')=2\cos\left(\frac{\alpha'+\beta'}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha'-\beta'}{2}\right). \qquad (b')=\frac{(a)+(c)}{2}$$

De maneira análoga obtemos as fórmulas seguintes.

Proposição (Transformação de Subtração em Produto)

(*a*) $\mathrm{sen}(\alpha') - \mathrm{sen}(\beta') = 2\mathrm{sen}\left(\dfrac{\alpha' - \beta'}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha' + \beta'}{2}\right).$

(*b*) $\cos(\alpha') - \cos(\beta') = -2\mathrm{sen}\left(\dfrac{\alpha' + \beta'}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\dfrac{\alpha' - \beta'}{2}\right).$

Definição

Definimos

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \quad D(\operatorname{tg}) = \{\alpha : \cos\alpha \neq 0\};$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}, \quad D(\operatorname{cotg}) = \{\alpha : \operatorname{sen}\alpha \neq 0\};$$

$$\operatorname{cossec}(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)}, \quad D(\operatorname{cossec}) = \{\alpha : \operatorname{sen}\alpha \neq 0\};$$

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}, \quad D(\sec) = \{\alpha : \cos\alpha \neq 0\}$$

Exercício (Entregar em 20/09)

(1) *Dê um significado geométrico para* $\mathrm{tg}(\alpha)$, $\mathrm{cotg}(\alpha)$, sec(α) *e* $\mathrm{cossec}(\alpha)$.

(2) *Esboce os gráficos das funções* tg, cotg, sec *e* cossec.

(3) *Classifique as funções trigonométricas em par, ímpar, periódica, limitada.*

Noção Intuitiva

Vamos estudar o comportamento de uma função $f(x)$ para valores de x próximos de um ponto p.

Consideremos, inicialmente, a função

$$f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ para } x \neq 1 \\ f(1) = 3. \end{cases}$$

Vamos analisar o que acontece com os valores $f(x)$ da função quando x está próximo de 1 mas é distinto de 1.

Noção Intuitiva

Para valores de x próximos de 1 (distintos de 1), alguns valores de $f(x)$ são dados na tabela abaixo:

$x > 1$	$f(x)$	$x < 1$	$f(x)$
$1,5$	$2,5$	$0,5$	$1,5$
$1,1$	$2,1$	$0,9$	$1,9$
$1,01$	$2,01$	$0,99$	$1,99$
$1,001$	$2,001$	$0,999$	$1,999$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
1	2	1	2

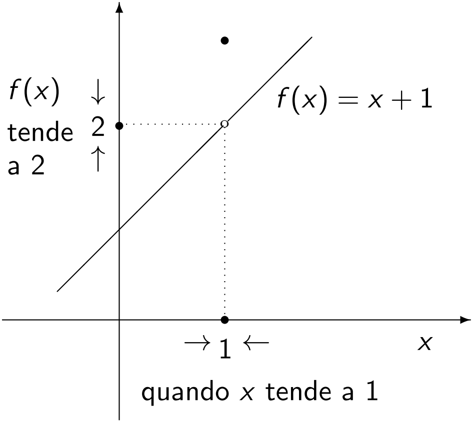
Noção Intuitiva

Da tabela vemos que quando x estiver próximo de 1 (por valores menores ou maiores que 1) $f(x)$ estará próximo de 2.

De fato, podemos tomar os valores de $f(x)$ tão próximos de 2 quanto quisermos, tomando valores x suficientemente próximos de 1 (distintos de 1).

Expressamos isso dizendo que o *limite da função* $f(x)$*, quando* x *tende a* 1*, é igual a 2.*

Noção Intuitiva



Noção Intuitiva

Definição (Intuitiva)

Escreveremos

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

e diremos que **o limite de** $f(x)$**, quando** x **tende a** p**, é igual a L**, *se* $f(x)$ *fica arbitrariamente próximo de* L *para valores de* x *suficientemente próximos de* p*, mas distintos de* p*.*

Observação:
É importante notar que, ao analisar o limite de $f(x)$ quando x tende a p, não consideramos $x = p$. Estamos interessados em estudar o que ocorre com $f(x)$ para x próximo a p. A função f nem precisa estar definida para $x = p$.

Noção Intuitiva

Exemplo

Encontrar o limite de $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ *quando* x *se aproxima de* 1, *isto é,* $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.

Observe que $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ não está definida em $x = 1$. Observe ainda que, para $x \neq 1$,

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1.$$

Como os valores das duas funções coincidem para $x \neq 1$, seus limites, quando x tende a 1, também coincidem. Assim, como no exemplo anterior, deduzimos que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

Noção Intuitiva

Exemplo

Determine $\lim_{x \to 1} f(x)$ *onde*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & \textit{para } x \neq 1 \\ 0, & \textit{para } x = 1. \end{cases}$$

Observe que para $x \neq 1$ a função $f(x)$ é igual à função do exemplo anterior, desta forma sabemos que $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

O valor do $\lim_{x \to 1} f(x)$ não coincide com o valor da função em $x = 1$.

Isto significa que o gráfico de f apresenta um salto em $x = 1$.

Expressamos este fato dizendo que *a função não é contínua.*

Noção Intuitiva

Exemplo

Determine o valor de c para que o gráfico da função f não apresente salto em $x = 1$, onde

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}, & \textit{para } x \neq 1 \\ c, & \textit{para } x = 1. \end{cases}$$

Observe que para $x \neq 1$

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \sqrt{x}+1$$

Desta forma, quando x se aproxima de 1, $f(x)$ se aproxima de 2. Sendo assim, escolha apropriada de c é $c = 2$.