Aula 12 - Limites infinitos e no infinito: assíntotas verticais e horizontais.

25 de Setembro de 2023

Segundo Semestre de 2023

Turma 2023113

O Teorema de Weierstrass e Aplicações

Teorema (de Weierstrass ou do Valor Extremo)

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ for contínua, existirão $p, q \in [a, b]$ tais que

$$f(p) \leqslant f(x) \leqslant f(q), \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Prova: Primeiramente mostremos que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua então $Im(f) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ é limitado. Considere o conjunto

$$A = \{x \in [a, b] : f \text{ é limitada em } [x, b]\} \subset [a, b].$$

Note que $A \neq \varnothing$ ($b \in A$) e limitado. Seja $c = \inf(A)$. Se $a < c$, da continuidade da f em c, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(c)| < 1$, $\forall x \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$. Se $x_1, x_2 \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$, $x_1 < c$ e $x_2 \in A$, $\sup\{|f(x)| : x \in [x_2, b]\} = L_2$ e $\sup\{|f(x)| : x \in [x_1, x_2]\} = L_1$ ($L_1 \leqslant |f(c)| + 1$). Logo $\sup\{|f(x)| : x \in [x_1, b]\} = \max\{L_1, L_2\}$ e isto é uma contradição pois $c = \inf(A)$.

Vamos mostrar que existe $p \in [a, b]$ tal que $f(p) \leqslant f(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Seja $m = \inf(Im(A))$. Se $m = f(b)$ acabamos. Se $m < f(b)$, seja $B = \{z \in [a, b] : m < f(x), x \in [z, b]\}$. Se $p = \inf(B)$, $f(p) = m$ pois se $f(p) > m$ chegamos (como antes) a uma contradição com $p = \inf(B)$. A existência de q segue da mesma forma. $\square$

Como uma conseqüência do Teorema do Valor Intermediário e do Teorema de Weierstrass, obtemos o seguinte resultado

Corolário

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se

$$m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\} \text{ e } M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\},$$

então

$$Im(f) = f([a, b]) = [m, M].$$

Exemplo

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Seja $\bar{x}$ um ponto de máximo (mínimo) de f.

$$\text{Se } \bar{x} \in (a, b), \text{ e } \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = L \text{ existe, então } L = 0.$$

Diremos que L, quando existir, será a derivada f em $\bar{x}$ e escreveremos $L =: f'(\bar{x})$.

De fato: Como $f(x) \leqslant f(\bar{x})$ para todo $x \in [a, b]$ e como $\bar{x} \in (a, b)$ temos do Teorema da Comparação que

$$\lim_{x \to \bar{x}^+} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = L \leqslant 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \bar{x}^-} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = L \geq 0.$$

Logo $L = 0$. $\square$

Exemplo

Seja $f(x) = x^3 - 3x + 4$, *encontre os candidados a pontos de máximo e mínimo locais de* f*.*

Solução: Vamos procurar por pontos $\bar{x}$ tais que

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \lim_{x \to \bar{x}} (x^2 + x\bar{x} + \bar{x}^2 - 3) = 3(\bar{x}^2 - 1) = 0.$$

Ou seja $\bar{x} = 1$ ou $\bar{x} = -1$. Veremos mais tarde que $\bar{x} = 1$ é um mínimo local enquanto que $\bar{x} = -1$ é um máximo local.

Exercício (Entregar dia 03/10)

Explore essa idéia para uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, *com* $a, b, c \in \mathbb{R}$*. Conclua que, se* $a > 0$ $(a < 0)$, f *assume o seu mínimo (máximo) em* $-b/2a$

A inversa de uma função contínua é contínua

Proposição

Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua e injetora. Então f é estritamente monótona. Se $f([a,b])=[m,M]$ e $p\in[a,b]$, $\lim\limits_{y\to f(p)} f^{-1}(y)=p$.

De fato: É fácil ver que f é estritamente monótona. Se $p\in(a,b)$ e f é estritamente crescente, dado $\epsilon>0$ escolha $\epsilon>\delta>0$ tal que

$$x\in[a,b],\ \ p-\delta<x<p+\delta \Rightarrow f(p)-\epsilon<f(x)<f(p)+\epsilon.$$

Se $x_1,x_2\in[a,b]$, $p-\delta<x_1<p<x_2<p+\delta$ temos $f(x_1)<f(p)<f(x_2)$ e, se $\delta'=\min\{f(p)-f(x_1),f(x_2)-f(p)\}$ temos (usamos TVI)

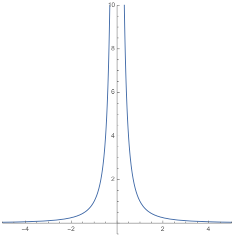
$$y\in D_{f^{-1}},\ \overbrace{f(p)-\delta'}^{f(x_1)\leqslant}<y<\underbrace{f(p)+\delta'}_{\leqslant f(x_2)}\ \Rightarrow |f^{-1}(y)-p|<\delta<\epsilon.$$

Faça o caso f estritamente decrescente.$\square$

Limites Infinitos e assíntotas verticais

Consideremos a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Quando x se aproxima de $p = 0$, x^2 também se aproxima de 0 e, consequentemente, $\dfrac{1}{x^2}$ fica arbitrariamente grande para valores de x próximos de $p = 0$.



Para indicar este fato escrevemos

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty.$$

Observação: Neste caso, não existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Por isso, muitas vezes nos referimos a este fato como $f(x)$ **diverge para** $+\infty$ **quando** x **tende a zero**. A reta vertical $x = 0$ é chamada uma **assíntota vertical** do gráfico de f.

Definição (Limite Infinito)

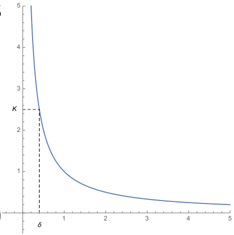
Seja f uma função e p um ponto de acumulação de D_f. Então diremos que

- $f(x)$ **diverge para** $+\infty$ **quando** x **tende a** p *se, dado* $K>0$, *existir* $\delta>0$ *tal que* $x \in D_f,\ 0<|x-p|<\delta \Rightarrow f(x)>K$.
  Notação $\lim\limits_{x\to p} f(x)=+\infty$.
- $f(x)$ **diverge para** $-\infty$ **quando** x **tende a** p *se, dado* $K>0$, *existir* $\delta>0$ *tal que* $x \in D_f,\ 0<|x-p|<\delta \Rightarrow f(x)<-K$.
  Notação $\lim\limits_{x\to p} f(x)=-\infty$.
- *Analogamente definimos* $\lim\limits_{x\to p^+} f(x)=\pm\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to p^-} f(x)=\pm\infty\right)$ *quando p é ponto de acumulação à direita (esquerda) de D_f.*

Exemplo

Verifique que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty.$

Se $K>0$, queremos encontrar $\delta>0$ tal que $1/x>K$ sempre que $0<x<\delta$. Isto sugere que devemos tomar $\delta=1/K$.



De fato: Seja $K>0$ escolha $\delta=\dfrac{1}{K}$. Então

$$0<x<\delta \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{x}>\frac{1}{\delta}=K.$$

Isto mostra que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$. A reta vertical $x=0$ é uma **assíntota vertical** do gráfico da função.

Exercício: Prove que $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$.

Definição

A reta $x = p$ é chamada de **assíntota vertical** *do gráfico da função f se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:*

$$\lim_{x\to p} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to p^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to p^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to p} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to p^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to p^-} f(x) = -\infty.$$

A seguinte proposição será muito útil para calcular limites.

Proposição

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ *uma função e* p *um ponto de acumulação de* D_f. *Se* $\lim_{x \to p} f(x) = 0$ *e existir* $r > 0$ *tal que* $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ *para* $x \in D_f$ *tal que* $0 < |x - p| < r$ *então,* $\lim_{x \to p} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ $(-\infty)$.

Observação: O resultado também vale para os casos $x \to p^+$ e $x \to p^-$. Basta que a função restrita a $D^+ = D_f \cap (p, \infty)$ e/ou a $D^- = D_f \cap (-\infty, p)$ esteja nas condições da proposição.

Prova da Proposição:

Dado $K > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$x \in D_f,\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow \frac{1}{f(x)} > K.$$

De fato: Como

$$\boxed{\lim_{x \to p} f(x) = 0,}$$

dado $\epsilon = \frac{1}{K} > 0$, existe $0 < \delta < r$, tal que

$$\boxed{x \in D_f,\ 0 < |x - p| < \delta} \Rightarrow 0 < f(x) < \epsilon = \frac{1}{K} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{f(x)} > K.}$$

Isto mostra que $\lim_{x \to p} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$

Exemplo

Analise os limites seguintes e interprete-os graficamente:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}, \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}.$$

De fato:

- $\lim_{x\to 1^+}(x-1) = 0 = \lim_{x\to 1^-}(x-1)$;
- se $x > 1$, então $x-1>0$; e, se $x<1$, então $x-1<0$.

Segue da Proposição anterior que

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

O $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$ não existe nem diverge para $+\infty$ ou $-\infty$.

A reta $x = 1$ é uma assíntota vertical do gráfico da função.

Propriedades dos limites infinitos

Seja L um número real. Temos:

- $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to p} f(x) = L \\ \lim\limits_{x\to p} g(x) = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to p} (f\cdot g)(x) = -\infty, \; L>0 \\ \lim\limits_{x\to p} (f\cdot g)(x) = +\infty, \; L<0 \\ \lim\limits_{x\to p} (f+g)(x) = -\infty. \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to p} f(x) = L \\ \lim\limits_{x\to p} g(x) = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to p} (f\cdot g)(x) = +\infty, \; L>0 \\ \lim\limits_{x\to p} (f\cdot g)(x) = -\infty, \; L<0 \\ \lim\limits_{x\to p} (f+g)(x) = +\infty \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \lim_{x\to p} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to p} g(x) = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to p} (f+g)(x) = +\infty \\ \lim_{x\to p} (f\cdot g)(x) = +\infty \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \lim_{x\to p} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to p} g(x) = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to p} (f+g)(x) = -\infty \\ \lim_{x\to p} (f\cdot g)(x) = +\infty \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \lim_{x\to p} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to p} g(x) = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to p} (f\cdot g)(x) = -\infty$$

Observação: As propriedades acima são válidas se, em lugar de $x \to p$, usarmos $x \to p^+$ ou $x \to p^-$.

Exemplo

Determine $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^2}.}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\cos x}_{\to 1} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to +\infty} = +\infty.$$

Exemplo

Determine $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^4}.}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}}_{\to 1} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to +\infty} = +\infty.$$

Observação: As propriedades acima sugerem como operar com os símbolos $+\infty$ e $-\infty$. Assim, por exemplo, se $L \in \mathbb{R}$,

$$L \pm \infty = \pm\infty, \ \infty \cdot (-\infty) = -\infty \text{ e } L \cdot (\pm\infty) = \pm\infty (\mp\infty) \text{ se } L > 0 (L < 0).$$

Também temos **indeterminações**, por exemplo,

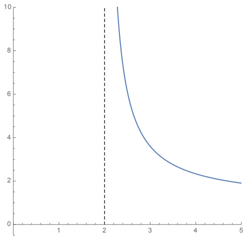
$$\boxed{\infty - \infty, \quad -\infty + \infty, \quad 0 \cdot \infty.}$$

Exemplo

Determine $\boxed{\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+3x}{x^2-4}.}$

De fato:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+3x}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \underbrace{\frac{1}{x-2}}_{\to+\infty} \underbrace{\frac{x^2+3x}{x+2}}_{\to 5/2} = +\infty$$



Exemplo

Determine $\displaystyle \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-1}{x^2-2x+1}.$

De fato:

Observe que $\displaystyle \frac{x^3-1}{x^2-2x+1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)^2}$. Assim,

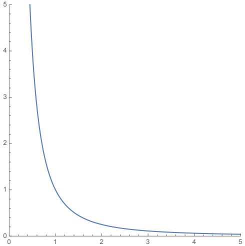
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-1}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1^-} \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\to -\infty} \underbrace{(x^2+x+1)}_{3} = -\infty.$$

Limites no Infinito e assíntotas horizontais

Consideremos a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x > 0$. Para x arbitrariamente grande $f(x)$ se torna arbitrariamente pequena.

Expressamos este fato escrevendo

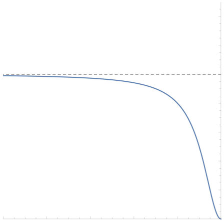
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$



Da mesma forma, para $x < 0$ com valor absoluto arbitrariamente grande temos que $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ fica arbitrariamente próxima de 1.

Expressamos este fato escrevendo

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1.}$$



O gráfico para $x > 0$ é a reflexão do gráfico acima em torno do eixo y.

Note que, neste exemplo, f é par e quando $x > 0$ arbitrariamente grande f fica arbitrariamente próxima de 1. Escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

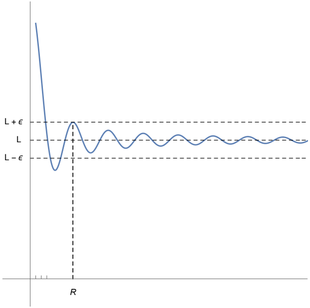
Definição (Limite no Infinito)

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função. Se D_f não é limitado superiormente,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

se, e só se, dado $\varepsilon > 0$, existir $R > 0$ tal que

$$x \in D_f,\ x > R \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$



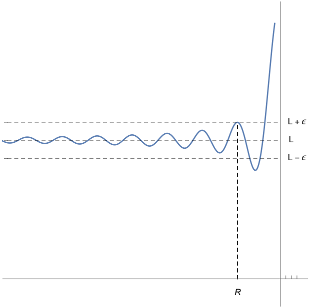
Definição (Limite no Infinito)

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função. Se D_f não é limitado inferiormente,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

se, e só se, dado $\varepsilon > 0$, existir $R < 0$ tal que

$$x \in D_f,\ x < R \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$



Definição

A reta $y = L$ *é uma* **assíntota horizontal** *ao gráfico de* f *se ou*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \qquad ou \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Exemplo

Temos $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \quad e \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0.$

De fato:

Dado $\varepsilon>0$, queremos achar $R>0$ suficientemente grande tal que

$$x>R>0 \implies |f(x)-0|=\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{x}<\varepsilon.$$

Tomando $R=\dfrac{1}{\varepsilon}>0$ temos

$$x>R>0 \implies 0<\frac{1}{x}<\frac{1}{R}=\varepsilon.$$

Logo $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$ A prova para $x\to-\infty$ é análoga.

Observação: As propriedades do limite são também válidas se $x \to p$ for substituído por $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Exemplo

Calcule $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n}$ *onde n é um inteiro positivo.*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} \right)^n = 0.$$

Em geral, temos que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^r} = 0$ onde $0 < r \in \mathbb{Q}$.

Exemplo

Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5+x^4+1}{2x^5+x+1}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5+x^4+1}{2x^5+x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}\right)}{x^5\left(2+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}}{2+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}} = \frac{1+0+0}{2+0+0} = \frac{1}{2}.$$

Analogamente, mostra-se que o limite quando $x\to-\infty$ é $\dfrac{1}{2}$.

Observação: A estratégia para calcular limites no infinito de funções racionais consiste em colocar em evidência a mais alta potência de x no numerador e no denominador.

Exemplo

Ache as assíntotas horizontais de $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x+5}$.

Consideremos $x \to +\infty$, então $x > 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2(2+\frac{1}{x^2})}}{x(3+\frac{5}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3+\frac{5}{x}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Agora, consideramos $x \to -\infty$, então $x < 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x+5} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3+\frac{5}{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

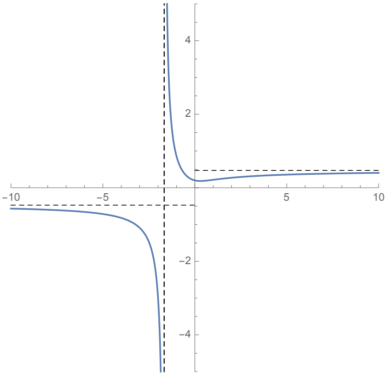
Logo, a reta

$y = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ é assíntota para $x \to +\infty$ e $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ é assíntota para $x \to -\infty$.

Note que

$$\lim_{x \to -5/3^+} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -5/3^-} f(x) = -\infty$$

Juntando as informações, este é o gráfico de $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x+5}$



Exemplo

Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right).$

Note que $\left|\dfrac{\operatorname{sen}\, x}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{|x|} = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$. Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, do Teorema do Confronto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\, x}{x} = 0$. Logo, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{\operatorname{sen}\, x}{x}\right) = 2.$

Exemplo

Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}.$

Fazendo $u = \dfrac{1}{x}$ temos que quando $x \to +\infty$, $u \to 0$. Portanto,

$$\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1.$$