Aula 13 - Limites infinitos no infinito, Logaritmo e Exponencial

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

27 de Setembro de 2023
Segundo Semestre de 2023
Turma 2023201

Limites no infinito (Continuação)

Exemplo

Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right).$

Note que $\left|\dfrac{\operatorname{sen}\,x}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{|x|} = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$. Como $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$, do Teorema do Confronto, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}\,x}{x} = 0$. Logo, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{\operatorname{sen}\,x}{x}\right) = 2.$

Exemplo

Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\operatorname{sen}\frac{1}{x}.$

Fazendo $u = \dfrac{1}{x}$ temos que quando $x \to +\infty$, $u \to 0$. Portanto,

$$\lim_{x\to\infty} x\operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}u}{u} = 1.$$

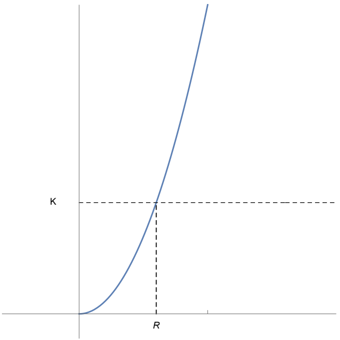
Limites Infinitos no Infinito

Note que, se $f(x) = x^2$ então, $f(x)$ fica arbitrariamente grande quando x fica arbitrariamente grande. Isto é expresso da seguinte maneira

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty.}$$

De fato: Dado $K > 0$, se tomarmos $R = \sqrt{K}$ segue que, se

$$x > R \Rightarrow f(x) = x^2 > R^2 = (\sqrt{K})^2 = K.$$



Utilizamos a notação

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

para indicar que $f(x)$ diverge para $+\infty$ quando x diverge para $+\infty$.

De forma análoga utilizamos as notações

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Definição (Limite Infinito no Infinito)

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

  se, e somente se, dado $K > 0$*, existe* $R > 0$ *tal que*
  $$x \in D_f, \; x > R \Rightarrow f(x) > K.$$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

  se, e somente se, dado $K < 0$*, existe* $R > 0$ *tal que*
  $$x \in D_f, \; x > R \Rightarrow f(x) < K.$$

De maneira análoga definimos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Observação: Todas as propriedades de limites infinitos valem se substituirmos $x \to p$ por $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Exemplo

- *Prove, usando a definição, que* $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$.
  De fato, se $f(x) = x$, *dado* $K > 0$ *tomando* $R = K$ *temos*
  $$\boxed{x > R \Rightarrow f(x)} = x \boxed{>} R = \boxed{K}$$
- *Segue das propriedades do limite que* $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, *onde* n *é um inteiro positivo. De fato,*
  $$\lim_{x \to +\infty} x^n = \left(\lim_{x \to +\infty} x \right)^n = +\infty$$

Exemplo

Determine $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x)$.

Temos uma indeterminação da forma $\infty - \infty$. Logo, não podemos aplicar a propriedade da soma. Contudo, podemos escrever

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to +\infty} x(x-1) = +\infty \cdot (+\infty - 1) = +\infty.$$

Exemplo

Determine $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 3x - 1}{2x^2 + x + 1}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 3x - 1}{2x^2 + x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} x \frac{\left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}{\left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = +\infty$$

Exemplo

Determine $\boxed{\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 1}{1 - 2x^2}}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{1 - 2x^2} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 \left(\frac{1}{x^2} - 2\right)} \\
&= \lim_{x \to -\infty} x \frac{\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}{\left(\frac{1}{x^2} - 2\right)} \\
&= (-\infty)\left(-\frac{1}{2}\right) = +\infty.
\end{aligned}$$

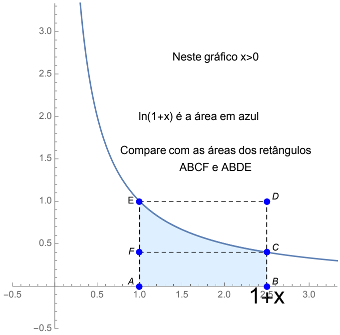
Logaritmo e Exponencial

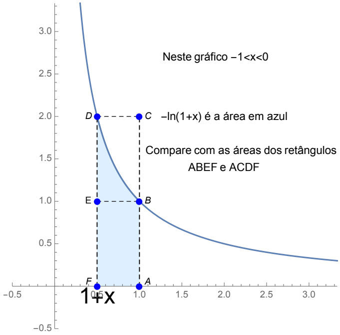
Para $x > 0$ definimos a função $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ da seguinte forma:

- para $x \geq 1$, $\ln x$ é a a área sob o gráfico da função $f(s) = \frac{1}{s}$, desde $s = 1$ até $s = x$ e,
- para $x \in (0, 1)$, $\ln x$ é o negativo da área sob o gráfico da função $f(s) = \frac{1}{s}$, desde $s = x$ até $s = 1$.

Esta função é estritamente crescente, portanto injetora. Veremos mais tarde que ln é sobrejetora.

A inversa de ln é a exponencial denotada por $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in (0, \infty)$.





Exemplo

$$\lim_{x \to 0} \ln(1+x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Da figura anterior

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x, \quad x > 0.$$

Dividindo por x:

$$\frac{1}{1+x} \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq 1, \ \ \forall\, x > 0.$$

Do Teorema do Confronto, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(1+x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

Por outro lado,

$$-x \leq -\ln(1+x) \leq \frac{-x}{1+x}, \quad -1 < x < 0$$

Dividindo por $-x > 0$,

$$1 \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq \frac{1}{1+x}, \ \forall -1 < x < 0.$$

Do Teorema do Confronto, $\lim\limits_{x\to 0^-} \ln(1+x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

Como ambos limites laterais existem e valem 1, segue que

$$\lim_{x\to 0} \ln(1+x) = 0 \ \text{ e } \ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \square$$

Exemplo

$\ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ *e* $\ln(x) + \ln(y) = \ln(x.y)$.

De fato: Basta ver que, se $y < x$, a área sob o gráfico da função $\frac{1}{x}$, entre y e x, corresponde a $\ln(x) - \ln(y)$ e que esta área coincide com a área sob o gráfico da função $\frac{1}{x}$, entre 1 e $\frac{x}{y}$ (aproxime ambas por retângulos). A segunda igualdade decorre da primeira.

Exemplo (1)

$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *é contínua e bijetora (estritamente crescente).*

De fato: Como $\lim_{x\to 0} \ln(1 + x) = 0$ se, e somente se, $\lim_{y\to 1} \ln(y) = 0$, segue de $\ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ que ln é contínua. A injetividade também segue. Como $\ln(2^n) = n\ln(2)$ e $\ln(2^{-n}) = n\ln(1/2)$, segue do teorema do valor intermediário que ln é sobrejetora.

Exemplo

$e^{x+y} = e^x e^y$, *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$, *e*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

É claro que $ln(e^x e^y) = x + y = ln(e^{x+y})$ a primeira afirmativa segue. Escreva $g(x) = e^x - 1$. Note que, $x = \ln(z+1)$ se, e somente, $z = e^x - 1$. Logo $g(x) = f^{-1}(x)$, onde $f(x) = \ln(x+1)$.

Dos exemplos anteriores, $z \to 0 \Leftrightarrow x \to 0$ e $1 = \lim_{z \to 0} \frac{\ln(z+1)}{z}$. Logo

$$1 = \lim_{z \to 0} \frac{1}{\frac{\ln(z+1)}{z}} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\ln(z+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$