Logarítimo e Exponencial - Derivadas
Aula 14

09 de Outubro de 2023

Segundo Semestre de 2023
Turma 2023201

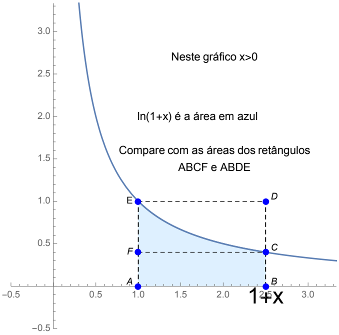
Logaritmo e Exponencial

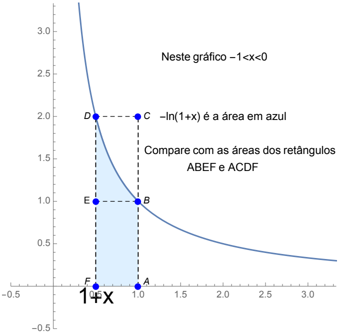
Para $x > 0$ definimos a função $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ da seguinte forma:

- para $x \geq 1$, $\ln x$ é a a área sob o gráfico da função $f(s) = \frac{1}{s}$, desde $s = 1$ até $s = x$ e,
- para $x \in (0, 1)$, $\ln x$ é o negativo da área sob o gráfico da função $f(s) = \frac{1}{s}$, desde $s = x$ até $s = 1$.

Esta função é estritamente crescente, portanto injetora. Veremos mais tarde que ln é sobrejetora.

A inversa de ln é a exponencial denotada por $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in (0, \infty)$.





Exemplo

$$\lim_{x\to 0} \ln(1+x) = 0 \quad e \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$$

Da figura anterior

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x, \quad x > 0.$$

Dividindo por x:

$$\frac{1}{1+x} \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq 1, \quad \forall\, x > 0.$$

Do Teorema do Confronto, $\lim_{x\to 0^+} \ln(1+x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

Por outro lado,

$$-x \leq -\ln(1+x) \leq \frac{-x}{1+x}, \quad -1 < x < 0$$

Dividindo por $-x > 0$,

$$1 \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq \frac{1}{1+x}, \ \forall -1 < x < 0.$$

Do Teorema do Confronto, $\lim_{x\to 0^-} \ln(1+x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

Como ambos limites laterais existem e valem 1, segue que

$$\lim_{x\to 0} \ln(1+x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \square$$

Exemplo

$\ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ *e* $\ln(x) + \ln(y) = \ln(x.y)$.

De fato: Basta ver que, se $y < x$, a área sob o gráfico da função $\frac{1}{x}$, entre y e x, corresponde a $\ln(x) - \ln(y)$ e que esta área coincide com a área sob o gráfico da função $\frac{1}{x}$, entre 1 e $\frac{x}{y}$ (aproxime ambas por retângulos). A segunda igualdade decorre da primeira.

Exemplo (1)

$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *é contínua e bijetora (estritamente crescente).*

De fato: Como $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1 + x) = 0$ se, e somente se, $\lim\limits_{y\to 1} \ln(y) = 0$, segue de $\ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ que ln é contínua. A injetividade também segue. Como $\ln(2^n) = n \ln(2)$ e $\ln(2^{-n}) = n \ln(1/2)$, segue do teorema do valor intermediário que ln é sobrejetora.

Exemplo

$e^{x+y} = e^x e^y$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, e

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.}$$

É claro que $ln(e^x e^y) = x + y = ln(e^{x+y})$ a primeira afirmativa segue. Escreva $g(x) = e^x - 1$. Note que, $x = \ln(z+1)$ se, e somente, $z = e^x - 1$. Logo $g(x) = f^{-1}(x)$, onde $f(x) = \ln(x+1)$.

Dos exemplos anteriores, $z \to 0 \Leftrightarrow x \to 0$ e $1 = \lim_{z\to 0} \frac{\ln(z+1)}{z}$. Logo

$$\boxed{1 = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(z+1)}{z}} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\ln(z+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}.}$$

Logaritmo e Exponencial - Outras bases

Seja $a > 0$ e $a \neq 1$. Definimos o logaritmo de base a, denotado por $\log_a$, da seguinte forma:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad \forall\, x > 0.$$

É claro que $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é contínua e bijetora (estritamente monótona) e sua inversa é a exponencial de base a denotada por $a^x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ também é uma função contínua e bijetora.

$$\log_a(a^x) = x,\ x \in \mathbb{R} \quad e \quad a^{\log_a x} = x,\ x > 0.$$

$$x = \log_a(a^x) = \frac{\ln(a^x)}{\ln(a)} \text{ and } \ln(a^x) = x \ln(a)$$

Proposição (Propriedades)

Se $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, $a, b \in (0, \infty)\setminus\{1\}$, $x, y \in (0, \infty)$, *então*

(a) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

(b) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

(c) $\log_a x^y = y \log_a x$.

(d) *Se* $a > 1$ *a função logarítmica é estritamente crescente, ou seja, se* $x < y$, *então* $\log_a x < \log_a y$.

(e) *Se* $0 < a < 1$ *a função logarítmica é estritamente decrescente, ou seja, se* $x < y$, *então* $\log_a x > \log_a y$.

(a) Já foi provado.
(b) Já foi provado.
(c) Note que

$$\boxed{y = \log_x(x^y) := \frac{\ln(x^y)}{\ln(x)}, \; x \neq 1}.$$

Alternativamente, é imediato (veja exemplo (1) trocando 2 por a) que $\ln(a^r) = r\ln(a)$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Como o logaritmo e a exponencial são contínuas e todo número real x pode ser aproximado por racionais temos que $\ln(a^x) = x\ln(a)$.
(d) Segue diretamente de (b).
(e) Segue diretamente de (b).

Proposição (Propriedades)

Se a e b são números reais positivos e $x, y \in \mathbb{R}$, então

(a) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \ 1 = a^x \cdot a^{-x}$ *(potências e raízes)*

(b) $(a^x)^y = a^{xy}$,

(c) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$,

(d) *Para* $a > 1$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x > y \Rightarrow a^x > a^y$, *ou seja,* $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in \mathbb{R}$ *é estritamente crescente.*

(e) *Para* $0 < a < 1$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x > y \Rightarrow a^x < a^y$, *ou seja,* $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in \mathbb{R}$ *é estritamente decrescente.*

(f) *A função* $a^x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *é contínua e bijetora. Veremos mais tarde que, se* $a > 1$ $(a < 1)$,

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad (+\infty) \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \quad (0)$$

(a) Basta recordar que a^x é injetora e que

$$\log_a(a^{x+y}) = x + y = \log_a(a^x) + \log_a(a^y) = \log_a(a^x a^y)$$

Note que a^x coincide com as potências e raízes de um número real positivo quando x é racional. De fato: $a^1 = a$ e portanto $a^n = \underbrace{a.a \cdots a}_{n-vezes}$ $(a^{-n} = \frac{1}{a^n})$ e $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$ e $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a > 0$.

(b) Basta usar novamente a injetividade e que

$$\log_a((a^x)^y) = y \log_a(a^x) = xy = \log_a(a^{xy})$$

(c) Basta usar novamente a injetividade e que

$$\ln((ab)^x) = x \ln(ab) = \ln(a^x) + \ln(b^x) = \ln(a^x b^x)$$

(d) Segue diretamente de $a^x - a^y = a^x(1 - a^{y-x})$.

(e) Segue diretamente de $a^x - a^y = a^x(1 - a^{y-x})$.

(f) Como a^x é a inversa de $\log_a(x)$ segue que a^x é contínua. Se $a > 1$, a^x é estritamente crescente, $a^n = (1+b)^n > 1 + nb$. Logo, dado qualquer número positivo y, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$a^{-n} < y < a^n.$$

O caso $a < 1$ segue usando o resultado para $\frac{1}{a} > 1$. Segue, do Teorema do Valor Intermediário, que $\mathrm{Im}(a^x) = (0, \infty)$.

Exercício: Esboce o gráfico das funções $f(x) = 2^x$ e $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

As derivadas: Motivação

Seja $x = f(t)$ uma equação horária do movimento de uma partícula sobre a reta real x. Então $f(t)$ descreve a posição da partícula no instante t, para cada $t \in \mathbb{R}$.

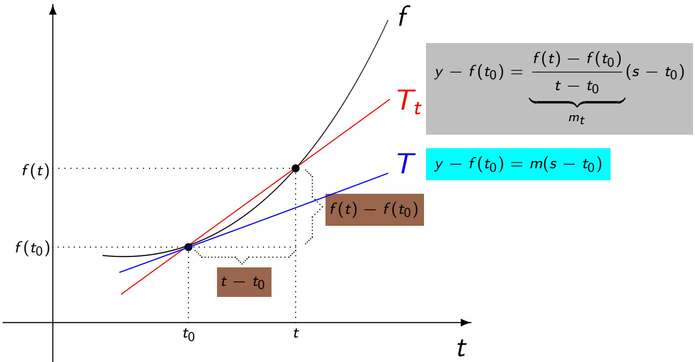
A **velocidade média** da partícula entre os instantes t_0 e t é dada por

$$\frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo decorrido}} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

e a **velocidade instantânea** ou simplesmente **velocidade** da partícula no instante t_0 é dada por

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}. \tag{1}$$

Consideremos a seguinte figura.



Notemos que, quando t se aproxima de t_0, a reta T_t "tende" a ocupar a posição da reta T, ou seja, o coeficiente angular m_t, da reta T_t, tende para o valor do coeficiente angular m, da reta T.

Logo, $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \to m$, quando $t \to t_0$, ou $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = m = v(t_0)$.

Fazendo a mudança de variável $t = t_0 + h,$ temos

$$t \to t_0 \Leftrightarrow h \to 0.$$

Portanto a equação (1) pode ser re-escrita como

$$v(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Agora, podemos dar a definição seguinte.

A derivada: Definição

Definição

Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ *uma função e* $p \in D_f$ *um ponto de acumulação de* D_f.

- *Se existir o limite* $\lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = L \in \mathbb{R}$, *diremos que* L *é a* **derivada** *de* f *em* p *e escreveremos*

$$f'(p) = L = \lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h}.$$

- *Se* f *admitir derivada* $f'(p)$ *em* p, *diremos que* f *é* **derivável** *ou* **diferenciável em** p.
- *Se* f *admitir derivada em todo ponto de* $A \subset D_f$, *diremos que* f *é* **derivável** *ou* **diferenciável em** $A \subset D_f$. *Se* $A = D_f$, *diremos simplesmente que* f *é* **derivável** *ou* **diferenciável**.

Exemplo (A)

Seja $f(x) = 2x^2 - 3$. *Então*

$$(a)\ f'(0) = 0; \quad (b)\ f'(2) = 8; \quad (c)\ f'(p) = 4p.$$

Solução: Por definição

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2h = 0,$$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(4+4h+h^2)-8}{h} = \lim_{h\to 0} (8+2h) = 8,$$

e em geral, para qualquer p,

$$f'(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(p+h)^2-3-(2p^2-3)}{h} = \lim_{h\to 0} (4p+2h) = 4p.$$

Exemplo

Mostre que $f(x) = |x|$ não é derivável em 0.

De fato: Verifiquemos que $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ não existe.

Calculando os limites laterais, temos

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{h - 0}{h} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{-h - 0}{h} = -1.$$

Portanto não existe $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$, ou seja, não existe $f'(0)$.

Reta Tangente e Reta Normal

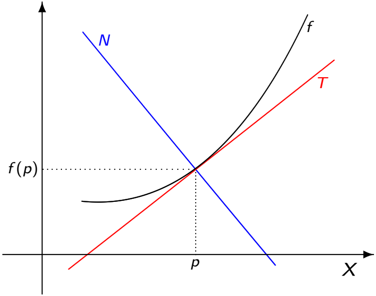
Conforme vimos, podemos interpretar a derivada como a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função.

Definição (Reta Tangente e Reta Normal)

Se f é diferenciável em p, a **reta tangente** *ao gráfico de $y = f(x)$ em $(p, f(p))$ é dada por $\big($vetor direção $(1, f'(p))\big)$*

$$y = f(p) + f'(p)(x-p), \quad \Big((x,y) = (p, f(p)) + (1, f'(p))(x-p)\Big).$$

Definimos a **reta normal** *ao gráfico de $y = f(x)$ em $(p, f(p))$ como a reta por este ponto que é perpendicular à reta tangente.*



Se $f'(p) = 0$, $x = p$ é a reta normal. Se $f'(p) \neq 0$, as retas por $(p, f(p))$ são da forma $r : (x, y) = (p, f(p)) + (1, a)(x - p)$ e têm vetor direção $(1, a)$. Neste caso, a reta normal é $\big((1, a) \perp (1, f'(p))\big)$

$$y = f(p) - \frac{1}{f'(p)}(x - p), \quad \Big((x, y) = (p, f(p)) + (1, \frac{-1}{f'(p)})(x - p)\Big).$$

Exemplo (A - Continuação)

Seja $f(x) = 2x^2 - 3$. *Determine a equação da reta* *tangente* *e da reta* *normal* *ao gráfico de* f *nos pontos*

$$(a)\ (0, f(0)); \qquad (b)\ (2, f(2)).$$

Solução:

(a) reta tangente é $y = -3$ e a reta normal é $x = 0$.

(b) Já vimos que $f'(2) = 8$. Portanto, a equação da

reta tangente é $y - 5 = 8(x - 2)$ e a equação da

reta normal é $y - 5 = -\frac{1}{8}(x - 2)$.

Exemplo

Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = 2x^2 - 3$ *e paralela à reta* $y = 2x + 3$.

Pela condição de paralelismo, devemos ter que

$$f'(p) = 2 \quad \text{ou} \quad 4p = 2, \quad \text{logo} \quad p = \frac{1}{2}.$$

Portanto a equação da reta tangente é

$$y - f\left(\tfrac{1}{2}\right) = f'\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(x - \tfrac{1}{2}\right), \qquad \text{ou seja} \qquad y + \tfrac{5}{2} = 2\left(x - \tfrac{1}{2}\right).$$

Taxas de Variação

Uma outra interpretação da derivada é como uma taxa de variação.

Consideremos, novamente, o problema de uma partícula que se desloca sobre o eixo x segundo a equação horária $x = f(t)$.

Definimos a velocidade instantânea como o limite das velocidades médias em intervalos cada vez menores.

Deste modo, a **velocidade instantânea** da partícula no instante t é

$$\boxed{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t).}$$

De maneira análoga, a **aceleração média** da partícula entre os instantes t e $t+\Delta t$ é dada por

$$\boxed{\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t},}$$

onde $v(t+\Delta t)-v(t)$ é a variação da velocidade entre os instantes t e $t+\Delta t$, e a **aceleração instantânea** ou simplesmente **aceleração** da partícula no instante t é dada por

$$\boxed{a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=v'(t)=f''(t).}$$

Exemplo

Uma partícula move-se sobre o eixo x de modo que, no instante t, a posição x é dada por $x = t^2,\ t \geq 0,$ *onde t é dado em segundos e x é dado em metros.*

(a) *Qual a velocidade da partícula no instante t?*

(b) *Qual a aceleração da partícula no instante t?*

Solução: A velocidade é a derivada da função posição, logo

$$v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{(t+h)^2 - t^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{t^2 + 2th + h^2 - t^2}{h} = 2t,$$

e a aceleração é a derivada da velocidade,

$$a(t) = \lim_{h\to 0} \frac{2(t+h) - 2t}{h} = 2.$$

Suponhamos agora que uma quantidade y depende de outra quantidade x, de modo que y é uma função de x, ou seja $y = f(x)$. A **taxa média de variação** de f entre x e $x + \Delta x$ é dada por

$$\boxed{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},}$$

A **taxa de variação** (instantânea) de f em x é dada por

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

e coincide com a derivada $f'(x)$ de f em x.

Observação: A taxa de variação tem uma interpretação específica dependendo da ciência à qual se refere. A seguir alguns exemplos:

- Suponha que a massa m de uma barra não homogênea seja uma função do comprimento, $m = f(x)$. Então definimos a **densidade linear** ρ como taxa de variação da massa em relação ao comprimento, ou seja, $\rho(x) = f'(x)$.

- Se um gás é mantido a uma temperatura constante, o volume V ocupado é uma função da pressão P, isto é, $V(P)$. Consideramos a taxa de variação do volume em relação à pressão, ou seja, $V'(P)$. A **compressibilidade isotérmica** é definida por $\beta = -\frac{V'(P)}{V}$.

- Seja $n = f(t)$ o número de indivíduos em uma população no instante t. Então a taxa de variação da população com relação ao tempo $f'(t)$ é chamada **taxa de crescimento**.

- Suponha que $C(x)$ seja o custo total da produção de x unidades de um produto dado. A taxa de variação do custo em relação ao número de ítens produzidos $C'(x)$ é chamado de **custo marginal**.