Reta Tangente e Reta Nomal, função derivada, derivadas de ordem superior e fórmulas e regras de derivação
Aula 15

11 de Outubro de 2023

Segundo Semestre de 2023
Turma 2023201

Exemplo (A - Continuação)

Seja $f(x) = 2x^2 - 3$. Determine a equação da reta tangente e da reta normal ao gráfico de f nos pontos

$$(a)\ (0, f(0)); \qquad (b)\ (2, f(2)).$$

Solução:

(a) reta tangente é $y = -3$ e a reta normal é $x = 0$.

(b) Já vimos que $f'(2) = 8$. Portanto, a equação da

reta tangente é $y - 5 = 8(x - 2)$ e a equação da

reta normal é $y - 5 = -\frac{1}{8}(x - 2)$.

Exemplo

Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = 2x^2 - 3$ e paralela à reta $y = 2x + 3$.

Pela condição de paralelismo, devemos ter que

$$f'(p) = 2 \quad \text{ou} \quad 4p = 2, \quad \text{logo} \quad p = \frac{1}{2}.$$

Portanto a equação da reta tangente é

$$y - f\left(\tfrac{1}{2}\right) = f'\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(x - \tfrac{1}{2}\right), \qquad \text{ou seja} \qquad y + \tfrac{5}{2} = 2\left(x - \tfrac{1}{2}\right).$$

Taxas de Variação

Uma outra interpretação da derivada é como uma taxa de variação.

Consideremos, novamente, o problema de uma partícula que se desloca sobre o eixo x segundo a equação horária $x = f(t)$.

Definimos a velocidade instantânea como o limite das velocidades médias em intervalos cada vez menores.

Deste modo, a **velocidade instantânea** da partícula no instante t é

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t).$$

De maneira análoga, a **aceleração média** da partícula entre os instantes t e $t+\Delta t$ é dada por

$$\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t},$$

onde $v(t+\Delta t)-v(t)$ é a variação da velocidade entre os instantes t e $t+\Delta t$, e a **aceleração instantânea** ou simplesmente **aceleração** da partícula no instante t é dada por

$$a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=v'(t)=f''(t).$$

Exemplo

Uma partícula move-se sobre o eixo x de modo que, no instante t, a posição x é dada por $x = t^2,\ t \geq 0,$ *onde t é dado em segundos e x é dado em metros.*

(a) *Qual a velocidade da partícula no instante t?*

(b) *Qual a aceleração da partícula no instante t?*

Solução: A velocidade é a derivada da função posição, logo

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{(t+h)^2 - t^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{t^2 + 2th + h^2 - t^2}{h} = 2t,$$

e a aceleração é a derivada da velocidade,

$$a(t) = \lim_{h \to 0} \frac{2(t+h) - 2t}{h} = 2.$$

Suponhamos agora que uma quantidade y depende de outra quantidade x, de modo que y é uma função de x, ou seja $y = f(x)$. A **taxa média de variação** de f entre x e $x + \Delta x$ é dada por

$$\boxed{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},}$$

A **taxa de variação** (instantânea) de f em x é dada por

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

e coincide com a derivada $f'(x)$ de f em x.

Observação: A taxa de variação tem uma interpretação específica dependendo da ciência à qual se refere. A seguir alguns exemplos:

- Suponha que a massa m de uma barra não homogênea seja uma função do comprimento, $m = f(x)$. Então definimos a **densidade linear** ρ como taxa de variação da massa em relação ao comprimento, ou seja, $\rho(x) = f'(x)$.

- Se um gás é mantido a uma temperatura constante, o volume V ocupado é uma função da pressão P, isto é, $V(P)$. Consideramos a taxa de variação do volume em relação à pressão, ou seja, $V'(P)$. A **compressibilidade isotérmica** é definida por $\beta = -\frac{V'(P)}{V}$.

- Seja $n = f(t)$ o número de indivíduos em uma população no instante t. Então a taxa de variação da população com relação ao tempo $f'(t)$ é chamada **taxa de crescimento**.

- Suponha que $C(x)$ seja o custo total da produção de x unidades de um produto dado. A taxa de variação do custo em relação ao número de ítens produzidos $C'(x)$ é chamado de **custo marginal**.

A função derivada

Já definimos a derivada de $f : D_f \to \mathbb{R}$ em pontos $p \in D_f$ que também são pontos de acumulação de D_f. Sendo assim, se

$$D_{f'} = \Big\{ x \in D_f : \ x \text{ é um ponto de acumulação de } D_f \text{ e } \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ existe.} \Big\} \subset D_f$$

definimos a função $f' : D_{f'} \to \mathbb{R}$ por

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad x \in D_{f'}.$$

Esta nova função f', é chamada **função derivada** ou, simplesmente, **derivada** de f.

Exemplo

Calcule a derivada de $f(x) = \sqrt{x-1}$ e determine o domínio de f'.

Solução: Note que, $D_f = [1, \infty)$ e para todo $x > 1$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h-1} - \sqrt{x-1}}{h},$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h-1) - (x-1)}{h} \frac{1}{\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

Logo $D_{f'} = (1, \infty)$

Notações alternativas. Seja $y = f(x)$, onde f é uma função derivável. Podemos escrever, alternativamente,

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(y) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

para denotar a derivada de y ou f em relação à variável x.

O símbolo $\dfrac{dy}{dx}$ não é um quociente; trata-se de uma notação.

Utilizando a notação de incremento, podemos escrever a definição de derivada como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Daí, tomando $\Delta y = \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$, podemos escrever

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{ou} \qquad \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

O seguinte Teorema estabelece uma relação entre continuidade e diferenciabilidade.

Teorema

Se f for diferenciável em $p \in D_f$, então f será contínua em p.

Prova: Recorde que p é um ponto de acumulação de D_f. Vamos mostrar que $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ ou que $\lim_{x \to p} (f(x) - f(p)) = 0$.

Escrevemos

$$f(x) - f(p) = \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot (x - p).$$

Assim

$$\lim_{x \to p} (f(x) - f(p)) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot \lim_{x \to p} (x - p) = f'(p) \cdot 0 = 0.$$

Portanto f é contínua em p. $\square$

Observação: Note que não vale a recíproca. A função

$f(x) = |x|$ é contínua em $x = 0$ mas não é diferenciável em $x = 0$.

Exemplo (Critério Negativo)

Se f não é contínua em p então f não é diferenciável em p.

Exemplo

A função $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1, \\ 2 & x > 1 \end{cases}$ *é diferenciávelem $x = 1$?*

Solução: Como

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 \neq 2 = \lim_{x \to 1^+} f(x),$$

$f(x)$ não é contínua em $x = 1$, logo não é diferenciável em $x = 1$.

Derivadas de Ordens Superiores

Seja f uma função derivável em $D_{f'}$. A função $f' : D_{f'} \to \mathbb{R}$ é dita **derivada** de f ou **derivada primeira de** f.

Então, podemos definir a derivada de f', que será chamada **derivada segunda de** f. Neste caso,

$$\boxed{(f')'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h},}$$

quando o limite existir. Escrevemos $f'' = f^{(2)} = (f')'$ para denotar a derivada segunda de f.

Para $n \in \mathbb{N}^*$, a **derivada n-ésima de** f será denotada por $f^{(n)}$, quando esta existir.

Alternativamente, podemos escrever

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{d^2f}{dx^2}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

para denotar a derivada segunda, f'', de $y = f(x)$. Analogamente, usamos

$$\boxed{\frac{d^3y}{dx^3}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{d^3f}{dx^3}}$$

para denotar a derivada de terceira, f''', de $y = f(x)$, e assim por diante.

Exemplo

Se a posição x de uma partícula é dada pela equação horária $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$. Encontre a aceleração $a(t)$ no instante t.

Solução: Vamos calcular a derivada $v(t) = x'(t)$. Note que

$$\begin{aligned} v(t) &= x'(t) = \lim_{r\to t} \frac{x(r)-x(t)}{r-t} = \lim_{r\to t}\left(\frac{r^3-t^3}{r-t} - 6\frac{r^2-t^2}{r-t} - \frac{9(r-t)}{r-t}\right) \\ &= \lim_{r\to t}\left(r^2+rt+t^2-6(r+t)-9\right) = 3t^2-12t-9. \end{aligned}$$

Agora, $a(t) = v'(t) = \lim\limits_{r\to t}\left(3\frac{r^2-t^2}{r-t} - 12\frac{r-t}{r-t} - \frac{9-9}{r-t}\right) = 6t - 12.$

Exemplo

Seja $f(x) = 3x^2 - 4x$. *Calcule* f', f'' *e* f'''.

Solução: Note que

$$f'(x) = \lim_{r \to x} \frac{f(r) - f(x)}{r - x} = \lim_{r \to x} \left(3\frac{r^2 - x^2}{r - x} - 4\frac{r - x}{r - x} \right) = \lim_{r \to x} \big(3(r + x) - 4 \big) = 6x - 4,$$

$$f''(x) = \lim_{r \to x} \frac{f'(r) - f'(x)}{r - x} = \lim_{r \to x} \left(6\frac{r - x}{r - x} - \frac{4 - 4}{r - x} \right) = 6$$

e $f'''(x) = 0$

Exemplo

Se $f(x) = \frac{1}{x}$, *então* $\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}}$.

Solução: Faremos a prova por indução. Note que, se $x \neq 0$,

$$f'(x) = \lim_{r\to x} \frac{f(r)-f(x)}{r-x} = \lim_{r\to x} \frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{x}}{r-x} = \lim_{r\to x} \frac{\frac{x-r}{rx}}{r-x} = -\lim_{r\to x} \frac{1}{rx} = -\frac{1}{x^2}.$$

Se $f^{(k-1)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$ (hipótese de indução), então

$$\begin{aligned}
f^{(k)}(x) &= \lim_{r\to x} \frac{f^{(k-1)}(r)-f^{(k-1)}(x)}{r-x} = (-1)^{k-1}(k-1)! \lim_{r\to x} \frac{\frac{1}{r^k}-\frac{1}{x^k}}{r-x} \\
&= (-1)^{k-1}(k-1)! \lim_{r\to x} \frac{-(r^k-x^k)}{r-x} \frac{1}{r^k x^k} \\
&= (-1)^{k-1}(k-1)! \lim_{r\to x} (-1) \frac{r^{k-1}+r^{k-2}x+\cdots+x^{k-1}}{r^k x^k} \\
&= (-1)^k (k-1)! \frac{kx^{k-1}}{x^{2k}} = (-1)^k k! \frac{1}{x^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Exemplo

Seja $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$. *Calcule* f' *e* f'' *quando existirem.*

Solução: Para $x < 0$ $f(x) = -x^2$, daí $f'(x) = -2x$.

Para $x > 0$, $f(x) = x^2$, daí $f'(x) = 2x$. Em $x = 0$ aplicamos a definição. Note que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} \dfrac{-x^2}{x} & se\ x < 0, \\ \dfrac{x^2}{x} & se\ x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & se\ x < 0, \\ x & se\ x > 0 \end{cases} = |x|$$

Portanto, $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$

Agora, $f''(x) = -2$, se $x < 0$, $f''(x) = 2$, se $x > 0$ e $f''(0)$ não existe.

Fórmulas e Regras de Derivação

Teorema (Fórmulas de Derivação)

Se $k \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, são válidas as fórmulas de derivação a seguir

(a) $f(x) = k \Rightarrow \ f'(x) = 0,$

(b) $f(x) = x^n \ \Rightarrow \ f'(x) = nx^{n-1},$

(c) $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \ \Rightarrow \ f'(x) = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1},$

(d) $f(x) = \operatorname{sen} x \ \Rightarrow \ f'(x) = \cos x,$

(e) $f(x) = \cos x \ \Rightarrow \ f'(x) = -\operatorname{sen} x,$

(f) $f(x) = e^x \Longrightarrow \ f'(x) = e^x,$

(g) $f(x) = \ln x \ \Longrightarrow \ f'(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$

Prova: A afirmativa (a) é trivial.

Prova do item (b). Lembremos que

$$y^n - x^n = (y-x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}).$$

Então,

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{y^n - x^n}{y-x} = \lim_{y\to x} (y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}) = nx^{n-1}.$$

Prova do item (c). Fazendo $u = \sqrt[n]{y}$ e $v = \sqrt[n]{x}$ temos, da continuidade de $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$, $y \to x \Rightarrow u \to v$. Assim

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x}}{y-x} = \lim_{u\to v} \frac{u-v}{u^n - v^n} = \frac{1}{nv^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Prova do item (d).

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x}{y - x} = \lim_{y \to x} \frac{2 sen\left(\frac{y-x}{2}\right) \cos\left(\frac{y+x}{2}\right)}{y - x} = \cos x.$$

Prova do item (e). Análoga ao item (d).

Prova do item (f).

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

pois, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$

Prova do item (g).

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right).$$

Fazendo $u = \dfrac{h}{x}$ temos que para $h \to 0$, $u \to 0$, assim

$$\lim_{h\to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x},$$

pois, $\displaystyle\lim_{u\to 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = \lim_{r\to\infty} \left(1 + \frac{1}{r}\right)^{r} = e.$