As Derivadas - Propriedades
Aula 16

18 de Outubro de 2023

Segundo Semestre de 2023
Turma 2023201

Fórmulas e Regras de Derivação

Teorema (Fórmulas de Derivação)

Se $k \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, são válidas as fórmulas de derivação a seguir

(g) $f(x) = \ln x \implies f'(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$

Prova do item (g).

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right).$$

Fazendo $u = \dfrac{h}{x}$ temos que para $h \to 0$, $u \to 0$, assim

$$\lim_{h\to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x},$$

pois, $\displaystyle \lim_{u\to 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = \lim_{r\to\infty} \left(1 + \frac{1}{r}\right)^{r} = e.$

Propriedades da Derivada

O teorema a seguir vai nos auxiliar muito no cálculo de derivadas.

Teorema (Propriedades da Derivada)

Sejam f e g funções diferenciáveis em p e k uma constante. Então

(a) kf será diferenciável em p e

$$(kf)'(p) = kf'(p),$$ **(Multiplicação por constante)**

(b) $f + g$ será derivável em p e

$$(f + g)'(p) = f'(p) + g'(p),$$ **(Derivada da Soma)**

(c) fg será derivável em p e

$$(fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p),$$ **(Derivada do Produto)**

(d) $\left(\frac{f}{g}\right)$ será derivável em p, se $g(p) \neq 0$ e, neste caso, teremos

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2},$$ **(Derivada do Quociente)**.

Como $\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}=f'(p)$ e $\lim_{x\to p}\frac{g(x)-f(p)}{x-p}=g'(p)$, temos

(a) $\lim_{x\to p}\frac{kf(x)-kf(p)}{x-p}=\lim_{x\to p}k\frac{f(x)-f(p)}{x-p}=k\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}=kf'(p).$

(b) $$\lim_{x\to p}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(p)}{x-p}=\lim_{x\to p}\frac{(f(x)-f(p)+(g(x)-g(p))}{x-p}$$

$$=\lim_{x\to p}\frac{(f(x)-f(p)}{x-p}+\lim_{x\to p}\frac{(g(x)-g(p))}{x-p}=f'(p)+g'(p).$$

(c) Note que g é contínua em p. Logo $\lim_{x\to p}g(x)=g(p)$ e

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)g(x)-f(p)g(p)}{x-p}=\lim_{x\to p}\left(\frac{f(x)-f(p)}{x-p}g(x)+f(p)\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right)$$

$$=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\lim_{x\to p}g(x)+f(p)\lim_{x\to p}\frac{g(x)-g(p)}{x-p}$$

$$=f'(p)g(p)+f(p)g'(p)$$

(d) Como g é contínua em p e $g(p) \neq 0$, $\lim_{x \to p} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(p)}$, e

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to p} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(p)}{g(p)}}{x-p} &= \lim_{x \to p} \left(\frac{f(x)g(p) - f(p)g(x)}{x-p} \frac{1}{g(x)g(p)} \right) \\
&= \lim_{x \to p} \left(\frac{(f(x) - f(p))g(p) - f(p)(g(x) - g(p))}{x-p} \frac{1}{g(x)g(p)} \right) \\
&= \lim_{x \to p} \left(\left(\frac{f(x)-f(p)}{x-p} g(p) - f(p) \frac{g(x)-g(p)}{x-p} \right) \frac{1}{g(x)g(p)} \right) \\
&= \left(\lim_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} g(p) - f(p) \lim_{x \to p} \frac{g(x)-g(p)}{x-p} \right) \lim_{x \to p} \frac{1}{g(x)g(p)} \\
&= \left(f'(p)g(p) - f(p)g'(p) \right) \frac{1}{g(p)^2}.
\end{aligned}$$

Exemplo

$$f(x) = x^8 + 12x^5 - 6x + 2 \implies f'(x) = 8x^7 + 60x^4 - 6.$$

Exemplo

$$f(x) = x\cos x \implies f'(x) = \cos x - x\,\mathrm{sen}x.$$

Exemplo

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^3 + 6} \implies f'(x) = \frac{2x(x^3+6) - (x^2-2)3x^2}{(x^3+6)^2}.$$

Exemplo

$$f(x) = x^{-n} \implies f'(x) = -n\,x^{-n-1}, \quad x \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Solução: Note que, se $g(x) = x^n$, $g'(x) = nx^{n-1}$ e $f(x) = \frac{1}{g(x)}$.

Logo

$$f'(x) = \frac{0.g(x) - 1.g'(x)}{g(x)^2} = -\frac{g'(x)}{g(x)^2} = -n\frac{x^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

Exemplo

$$f(x) = \log_a x \implies f'(x) = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0.$$

Solução: Segue diretamente do fato que $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ e da fórmula de mudança de base

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x.$$

Exemplo

Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ *no ponto* $(1, \frac{e}{2})$.

Solução: Como

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x^2) - e^x 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2},$$

a inclinação da reta tangente em $(1, \frac{e}{2})$ é $f'(1) = 0$. Logo a equação da reta tangente é $y = \frac{e}{2}$.

A Regra da Cadeia

A Regra da Cadeia nos fornece uma maneira de calcular a derivada da função composta $h = f \circ g$ em termos das derivadas de f e de g.

Teorema (Regra da Cadeia)

Sejam f e g diferenciáveis com $\mathrm{Im}(g) \subset D_f$. Se $h = f \circ g$, então h é diferenciável e

$$\boxed{h'(x) = f'(g(x))g'(x), \quad \textit{para todo } x \in D_g.} \tag{1}$$

De fato: Note que $x \to p \Rightarrow u = g(x) \to g(p) = u_p$. Se $g(x) \neq g(p)$ para todo x próximo a p,

$$\boxed{\lim_{x\to p} \frac{f(g(x)) - f(g(p))}{x-p}} = \boxed{\lim_{x\to p} \frac{f(\overbrace{g(x)}^{u}) - f(\overbrace{g(p)}^{u_p})}{g(x)-g(p)} \frac{g(x)-g(p)}{x-p}}$$

$$= \boxed{\lim_{u\to u_p} \frac{f(u)-f(u_p)}{u-u_p} \lim_{x\to p} \frac{g(x)-g(p)}{x-p}}$$

$$= \boxed{f'(u_p)g'(p) = f'(g(p))g'(p).}$$

Se $g(x) = g(p)$ para valores de x arbitrariamente próximos a p, então $g'(p) = 0$ e $(f \circ g)'(p) = 0$ e a igualdade segue.

Notação alternativa. Nas condições do Teorema 3 temos

$$\begin{cases} y = f(u) & \Longrightarrow & \dfrac{dy}{du} = f'(u) \\[2ex] u = g(x) & \Longrightarrow & \dfrac{du}{dx} = g'(x). \end{cases} \tag{2}$$

Por outro lado, $h(x) = f(g(x)) = f(u) = y$ ou seja $y = h(x)$.

Portanto

$$\frac{dy}{dx} = h'(x) = f'(g(x))g'(x). \tag{3}$$

Daí, substituindo (2) em (3), obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}, \qquad \text{para todo } x \in D_g\,.$$

Exemplo

Calcule a derivada de $h(x) = \cos(\sqrt{x})$.

Solução: Fazendo $u = g(x) = \sqrt{x}$ e $f(x) = \cos u$, então

$$h(x) = f(g(x)), \; g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \; f'(x) = -\mathrm{sen} x.$$

Pela Regra da Cadeia,

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = -\mathrm{sen}(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Observação: Ao aplicar a Regra da Cadeia derivamos primeiro a função de fora f e avaliamos na função de dentro $g(x)$ e então multiplicamos pela derivada da função de dentro.

Exemplo

Calcule a derivada de $h(t) = \ln(4t - 2)$.

Solução: Fazendo $g(t) = 4t - 2$ e $f(x) = \ln x$, então $h(t) = f(g(t))$, $g'(t) = 4$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$. Pela Regra da Cadeia,

$$h'(t) = f'(g(t))g'(t) = \frac{1}{4t-2}4 = \frac{4}{4t-2}.$$

Exemplo

Calcule a derivada de $f(x) = e^{ax}$.

Solução: $f'(x) = e^{ax} \cdot a$.

Exemplo

Calcule a derivada de $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(e^x))$.

Solução: $f'(x) = \cos(\cos(e^x)) \cdot (-\operatorname{sen}(e^x) \cdot e^x)$.

Exemplo

Seja $a > 0$ uma constante com $a \neq 1$. Então $(a^x)' = a^x \ln a$.

Solução: Escrevemos $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$ e pela Regra da Cadeia

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln a} = e^{x\ln a}\frac{d}{dx}(x\ln a) = e^{x\ln a}\ln a = a^x \ln a.$$

Logo

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Exemplo

Se α uma constante e $x > 0$, então $(x^{\alpha})' = \alpha\, x^{\alpha-1}$.

Solução: Escrevemos $x^{\alpha} = e^{\ln x^{\alpha}} = e^{\alpha \ln x}$ e pela Regra da Cadeia

$$\frac{d}{dx}x^{\alpha} = \frac{d}{dx}e^{\alpha \ln x} = e^{\alpha \ln x}\frac{d}{dx}(\alpha \ln x) = x^{\alpha}\alpha\frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Logo

$$(x^{\alpha})' = \alpha\, x^{\alpha-1} \text{ para todo } x > 0.$$

Regra da Potência combinada com a Regra da Cadeia: para qualquer número α e $g(x)$ diferenciável, temos

$$\boxed{\frac{d}{dx}[g(x)]^{\alpha} = \alpha[g(x)]^{\alpha-1}g'(x).}$$

Exemplo

$$(a)\quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}} \Rightarrow y' = -\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{4}{3}}(2x+1)$$

$$(b)\quad y = \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^4 \Rightarrow y' = 4\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^3\left(\frac{(x^2+1)-(x+1)2x}{(x^2+1)^2}\right).$$

Outras aplicações da Regra da Cadeia: Suponha $g(x)$ derivável. Então

$$(a)\ [e^{g(x)}]' = e^{g(x)} g'(x), \qquad (b)\ [\ln g(x)]' = \frac{g'(x)}{g(x)},$$

$$(c)\ [\cos g(x)]' = -g'(x)\,\mathrm{sen}\, g(x), \qquad (d)\ [\mathrm{sen}\, g(x)]' = g'(x) \cos g(x).$$

Exemplo

$$(a)\ [e^{x^2}]' = e^{x^2} 2x, \qquad (b)\ [\ln x^3]' = \frac{3x^2}{x^3},$$

$$(c)\ [\mathrm{sen}(x^5)]' = \cos(x^5) 5x^4, \qquad (d)\ [\mathrm{sen}^5 x]' = 5\mathrm{sen}^4 x \cos x.$$

Exemplo

Se f e g são funções deriváveis e $f(x) > 0$. Então $f(x)^{g(x)}$ é derivável e

$$[f(x)^{g(x)}]' = f(x)^{g(x)}[g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x)].$$

Solução: Escrevemos

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}.$$

Então,

$$[f(x)^{g(x)}]' = e^{g(x)\ln f(x)}[g(x)\ln f(x)]',$$

e portanto,

$$\begin{aligned} [f(x)^{g(x)}]' &= f(x)^{g(x)}[g(x)\ln f(x)]' \\ &= f(x)^{g(x)}[g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x)]. \end{aligned}$$

Exemplo

Calcule a derivada de $f(x) = x^x$.

Solução: Escrevemos $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$ e aplicamos a Regra da Cadeia,

$$[x^x]' = e^{x \ln x}(x \ln x)' = x^x(\ln x + 1).$$

Derivada da Função Inversa

Considere f invertível. Então, para todo $x \in D_{f^{-1}}$,

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Já vimos que se f é contínua, então f^{-1} também é.

Se, além disso, f e f^{-1} forem deriváveis, pela Regra da Cadeia,

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1.$$

Portanto, para todo $x \in D_{f^{-1}}$, tal que $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, vale

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Para mostrar que f^{-1} é diferenciável usamos a seguinte proposição:

Proposição (Derivada de funções inversas)

Seja f invertível e definida em um intervalo. Se f for diferenciável em $q = f^{-1}(p)$, com $f'(q) \neq 0$, então f^{-1} será diferenciável em p e

$$(f^{-1})'(p) = \frac{1}{f'(f^{-1}(p))}\,.$$

De fato: Como f^{-1} é contínua em p, $\lim_{h\to 0} f^{-1}(p+h) = f^{-1}(p)$.
Usando que $f(f^{-1}(x)) = x$, $x \in D_{f^{-1}}$, temos

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(p) &= \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(p+h) - f^{-1}(p)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\frac{h}{f^{-1}(p+h)-f^{-1}(p)}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(p+h))-f(f^{-1}(p))}{f^{-1}(p+h)-f^{-1}(p)}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(p))}\end{aligned}$$

Exemplo

Se $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$, então $g'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$.

Recorde que, $x > 0$ se n for par e $x \neq 0$ se n for ímpar.

Solução: Note que $g(x) = x^{\frac{1}{n}} = f^{-1}(x)$ onde $f(u) = u^n$. Então

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{\frac{n-1}{n}})} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Exemplo

Mostre que a função $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ *definida por* $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, *é bijetora.*

De fato: Já sabemos f é contínua e que $\operatorname{Im}(f) \subset [-1, 1]$.

Como $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$ e $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, do teorema do valor intermediário que $\operatorname{Im}(f) \supset [-1, 1]$ e que f é sobrejetora.

Para verificar que f é injetora observamos que se $x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $x > y$, então $\frac{x-y}{2} \in (0, \frac{\pi}{2}]$ e $\frac{x+y}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Logo

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) > 0.$$

Exemplo

A inversa da função $f(x) = sen\ x$, para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, é a função $g(x) = \operatorname{arcsen} x$, para $x \in [-1, 1]$. Qual é a derivada de $g(x)$?

Solução: Aplicando a Proposição 1.

$$\boxed{\mathrm{arcsen}'x = \frac{1}{\cos(\mathrm{arcsen}\ x)}.}$$

Agora, $\boxed{1 = \cos^2(\mathrm{arcsen} x) + \mathrm{sen}^2(\mathrm{arcsen} x) = \cos^2(\mathrm{arcsen}\ x) + x^2,}$ logo $\cos(\mathrm{arcsen} x) = \sqrt{1 - x^2}$ pois $\cos y \geq 0$ para $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Portanto,

$$\boxed{\mathrm{arcsen}'x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

De maneira análoga podemos definir as funções trigonométricas inversas do $\cos x$, $\mathrm{tg} x$, $\sec x$ e $\mathrm{cotg}\ x$, denominadas $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\ x$, $\mathrm{arcsec}\ x$ e $\mathrm{arccotg}\ x$.

Exercício: Mostre que (Entregar dia 25/10/2023)

(a) $\operatorname{arccos}' x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; (b) $\operatorname{arctg}' x = \dfrac{1}{1+x^2}$;

(c) $\operatorname{arcsec}' x = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$; (d) $\operatorname{arccotg}' x = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Derivação Implícita

Em geral, as funções são dadas na forma $y = f(x)$. Entretanto, algumas funções são definidas implicitamente por uma relação entre x e y.

No exemplo $x^2 + y^2 = 25$ é possível resolver uma equação e obter $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. Contudo, no exemplo $x^3 + y^3 = 6xy$ não é fácil obter y como função de x.

Neste caso, para calcular a derivada de y, recorremos à **derivação implícita**, que consiste em derivar a ambos os lados da equação em relação a x e então resolver a equação resultante para encontrar y'.

A existência de uma função diferenciável $y(x)$ dada pela equação será mostrada no Cálculo III. Este resultado mostrará que sempre que podemos encontrar y' o resultado é válido.

Exemplo

Se $x^2 + y^2 = 25$, encontre $\frac{dy}{dx}$.

Solução: Derivando a ambos os lados da equação e usando a Regra da Cadeia,

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}25 \Rightarrow \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Assim, $\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.}$

Exemplo

Se $x^3 + y^3 = 6xy$, encontre $\frac{dy}{dx}$.

Solução: Derivando ambos os lados da equação em relação a x, obtemos $3x^2 + 3y^2y' = 6y + 6xy'$. Resolvendo em y'

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}.$$

Exemplo

Se $y = f(x)$ é diferenciável e $xf(x) + \operatorname{sen} f(x) = 4$, determine $f'(x)$.

Solução: Note que,

$$0 = \frac{d}{dx}(xf(x) + \operatorname{sen}(f(x))) = f(x) + xf'(x) + \cos(f(x))f'(x).$$

Assim,

$$f'(x) = -\frac{f(x)}{x + \cos(f(x))}$$