Aplicações do Teorema do Valor Médio, Máximos e Mínimos
Aula 18

25 de Outubro de 2023

Segundo Semestre de 2023
Turma 2023201

Agora vamos obter informação do comportamento de uma função a partir de suas derivadas. Os fatos a seguir são conseqüências do Teorema do Valor Médio.

Corolário (1)

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b).

Se *$f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, f será estritamente crescente em $[a, b]$.*

Se *$f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$, f será estritamente decrescente em $[a, b]$.*

Corolário (2)

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b).

- *Se $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$, f será crescente em $[a, b]$.*
- *Se $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b)$, f será decrescente em $[a, b]$.*

Exemplo

Mostre que a função $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ definida por

$f(x) = \mathrm{sen} x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, é bijetora.

De fato: Já sabemos f é contínua e que $\mathrm{Im}(f) \subset [-1, 1]$.

Como $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$ e $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, segue do Teorema do Valor Intermediário que $\mathrm{Im}(f) \supset [-1, 1]$ e que f é sobrejetora.

Para verificar que f é injetora observamos que $f'(x) = \cos(x) > 0$ para todo $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Segue do Corolário (1) que f é estritamente crescente e portanto injetora.

Exemplo

Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f e esboce o gráfico de $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$.

Solução: Calculamos $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 3(x-1)(x-\frac{1}{3})$ e analisamos o sinal.

- $f'(x) > 0$ em $(-\infty, \frac{1}{3})$ e $(1, +\infty) \Rightarrow f$ é estritamente crescente em $(-\infty, \frac{1}{3}]$ e $[1, +\infty)$,
- $f'(x) < 0$ em $(\frac{1}{3}, 1) \Rightarrow f$ é estritamente decrescente $[\frac{1}{3}, 1]$.
- $f(0) = 2$, $f(\frac{1}{3}) = 2 + \frac{4}{27}$, $f(1) = 2$, $f(x) \geq 2$, para $x \geq 0$, $f(-1) = -2$ e $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
- Do Teorema do Valor Intermediário e do fato que f é injetora em $(-\infty, \frac{1}{3}]$, existe um único $z \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = 0$ e $z \in (-1, 0)$.

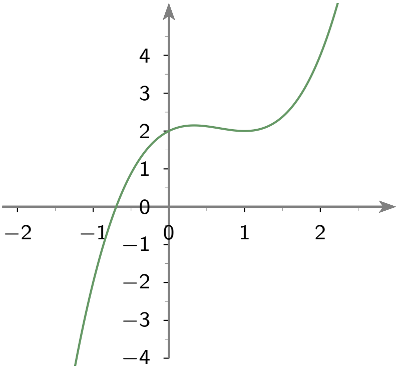


Figura: Esboço do gráfico

Máximos e Mínimos

Definição (Máximos e Mínimos Locais)

Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função.

- *Diremos que $x_0 \in I$ é um* **ponto de máximo local** *de f, se existir $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é um* **máximo local**.
- *Diremos que $x_0 \in I$ é um* **ponto de mínimo local** *de f, se existir $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é* **mínimo local**.
- *Um ponto $x_0 \in I$ será dito um* **ponto extremo local**, *se x_0 for um ponto de máximo local ou um ponto de mínimo local.*

Definição (Máximos e Mínimos Globais)

- *Diremos que* $x_0 \in I$ *é um* **ponto de máximo global** *de* f, *se* $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in I$. *Neste caso,* $f(x_0)$ *é um* **máximo global**.

- *Diremos que* $x_0 \in I$ *é um* **ponto de mínimo global** *de* f, *se* $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in I$. *Neste caso,* $f(x_0)$ *é* **mínimo global**.

- *Um ponto* $x_0 \in I$ *será dito um* **ponto extremo global**, *se* x_0 *for um ponto de máximo ou de mínimo global.*

Exemplo

O valor máximo de $f(x) = \cos x$ é 1 e é assumido infinitas vezes.

Definição

*Um **ponto crítico** de uma função f é um ponto c onde ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.*

Exemplo

Os pontos críticos de $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$ são $\dfrac{3}{2}$ e 0.

Temos, para $x \neq 0$, que $f'(x) = \dfrac{12 - 8x}{5x^{2/5}}$. Então, $f'(x) = 0$ se $12 - 8x = 0$, ou seja $x = \dfrac{3}{2}$ e $f'(0)$ não existe.

Proposição

Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $c\in(a,b)$ for um ponto extremo (máximo ou mínimo) de f, então $f'(c)=0$.

Observações:

- Todo ponto extremo de uma função diferenciável definida em um intervalo aberto é um ponto crítico. Se f estiver definida em um intervalo aberto, deveremos procurar os pontos extremos entre os pontos críticos.
- A função $f(x)=|x|$ tem valor mínimo em $x=0$, mas $f'(0)$ não existe. Não podemos tirar a hipótese de diferenciabilidade.
- A recíproca não vale. De fato, $f(x)=x^3$ é estritamente crescente e $f'(0)=0$.

- Se I não for um intervalo aberto, o resultado poderá não ser verdadeiro. Por exemplo, $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$, os pontos extremos serão $x = 0$ e $x = 1$. Em ambos os casos, $f'(x) = 1$.
- O Teorema de Weierstrass afirma que uma função contínua em um intervalo fechado assume seus valores máximo e mínimo globais, mas não diz como encontrá-los.
- Notemos que o valor extremo de uma função contínua definida num intervalo fechado ou ocorre num ponto crítico ou ocorre em um extremo do intervalo.

Método do Intervalo Fechado

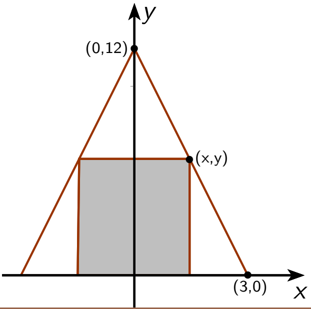
Para encontrar os valores máximos e mínimos globais de uma função contínua f num intervalo fechado $[a, b]$:

1. Encontre os valores de f nos pontos críticos de f em (a, b).
2. Encontre os valores de f nos extremos do intervalo.
3. O maior valor das etapas 1 e 2 é o valor máximo global e o menor desses valores é o mínimo global.

Exemplo

Um triângulo isósceles tem uma base de 6 unidades e uma altura de 12 unidades. Encontre a área máxima possível de um retângulo que pode ser colocado dentro do triângulo com um dos lados sobre a base do triângulo.

Solução: Introduzimos um sistema de coordenadas de modo a que a base do triângulo esteja sobre o eixo x e o eixo y o corta ao meio. Logo, nosso problema será achar o valor máximo da área A do retângulo dada por $A = 2xy$.



Como (x, y) está sobre o lado do triângulo temos que $y = 12 - 4x$.
Assim, a área pode ser expressa apenas em função de x:

$$A(x) = 2x(12 - 4x) = 24x - 8x^2.$$

Como x e y representam comprimentos e A é uma área, estas variáveis não podem ser negativas. Segue-se que $0 \leq x \leq 3$.

Assim, nosso problema pode ser formulado da seguinte maneira: encontre o valor máximo da função

$$A(x) = 24x - 8x^2 \qquad 0 \leq x \leq 3.$$

Temos que $A'(x) = 24 - 16x$, então $x = \dfrac{3}{2}$ é o único ponto crítico. Avaliamos A nos extremos e no ponto crítico: $A(0)=0$, $A(\frac{3}{2})=18$ e $A(3) = 0$. Portanto, a área máxima possível é 18 unidades.

Critério da derivada primeira

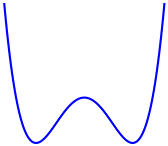
O resultado abaixo segue dos Corolários do Terorema do Valor Médio.

Proposição (Critério da derivada primeira)

Seja c um ponto crítico de f. Se f é contínua em $(c-\delta, c+\delta)$ e diferenciável em e $(c-\delta, c+\delta)\backslash\{c\}$

(i) *Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então f tem um máximo local em c.*

(ii) *Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c.*



Exemplo

Determine os extremos locais de $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{1 + 3x^2}$ *e esboce o gráfico.*

Solução: Como $f'(x) = \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{(1 + 3x^2)^2}$, o sinal de f' é dado pelo sinal do numerador $3x^2 + 2x - 1 = 3(x + 1)(x - \frac{1}{3})$. Então,

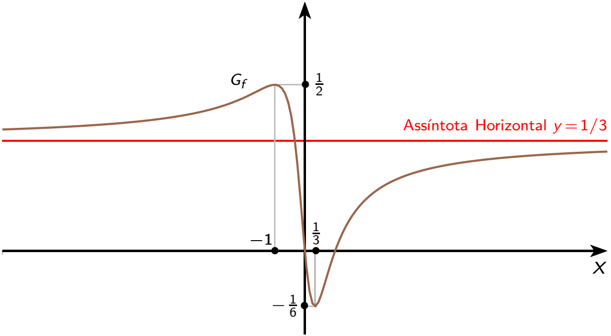
- $f'(x) = 0$ se $x = -1$ e $x = \frac{1}{3}$. Logo -1 e $\frac{1}{3}$ são pontos críticos,
- f é estritamente crescente em $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$ $(f'(x) > 0)$.
- f é estritamente decrescente $[-1, \frac{1}{3}]$ $(f'(x) < 0$ em $(-1, \frac{1}{3}))$.

Assim,

$x = -1$ é ponto de máximo local com valor máximo $f(-1) = \frac{1}{2}$ e

$x = \frac{1}{3}$ é ponto de mínimo local com valor mínimo $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{6}$.

A reta $y = 1/3$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f.



Exemplo

Mostre que $e^x \geq x + 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução:

Se $f(x) = e^x - (x + 1)$, $f(0) = 0$ e $f'(x) = e^x - 1$. Logo $f'(x) > 0$, se $x > 0$ e $f'(x) < 0$ se $x < 0$.

Portanto 0 é um ponto de mínimo global de f e $f(x) \geq f(0) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, mostrando o resultado.