Concavidade, Inflexão e Análise de Gráficos
Aula 19

30 de Outubro de 2023

Segundo Semestre de 2023

Turma 2023201

Concavidade

Agora vamos obter mais informações sobre o comportamento de uma função f.

Isto será feito com o auxílio do Teorema do Valor Médio para compreender o significado das derivadas de ordem superior.

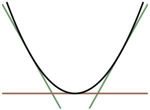
Sejam f derivável em (a, b) e $p \in (a, b)$. Consideremos a reta tangente T_p ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ dada por

$$\boxed{T_p(x) = f(p) + f'(p)(x - p).}$$

Definição (Concavidade)

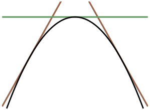
Seja f derivável em (a, b). Diremos que

- *f é* **convexa** *ou tem* **concavidade para cima** *em (a, b) se, para quaisquer $x, p \in (a, b)$, com $x \neq p$, tivermos*



$$f(x) > T_p(x).$$

- *f é* **côncava** *ou tem* **concavidade para baixo** *em (a, b) se, para quaisquer $x, p \in (a, b)$, com $x \neq p$, tivermos*



$$f(x) < T_p(x).$$

O nosso próximo resultado estabelece condições suficientes para que uma função f tenha concavidade para cima ou para baixo.

Teorema

Seja f uma função derivável em (a, b).

(i) *Se f' for estritamente crescente em (a, b), então f terá concavidade para cima em (a, b).*

(ii) *Se f' for estritamente decrescente em (a, b), então f terá concavidade para baixo em (a, b).*

De fato: Do Teorema do Valor Médio, para algum c entre x e p,

$$f(x) - T_p(x) = f(x) - f(p) - f'(p)(x - p) = (f'(c) - f'(p))(x - p).$$

Como, $x > p \Rightarrow p < c < x$ e $x < p \Rightarrow x < c < p$, se f' é estritamente crescente (decrescente) $f(x) - T_p(x) > 0$ $(f(x) - T_p(x) < 0)$.

Corolário (Critério de concavidade)

Seja f uma função derivável até segunda ordem em (a, b).

(i) *Se $f''(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, então f terá concavidade para cima em (a, b).*

(ii) *Se $f''(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$, então f terá concavidade para baixo em (a, b) .*

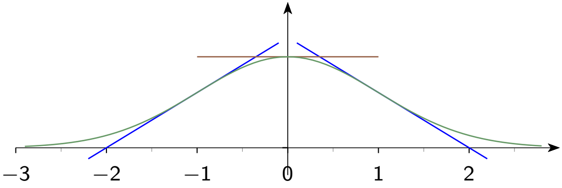
De fato: Note que $f''(x) = (f')'(x) > 0$ (< 0), para todo $x \in (a, b)$, implica que f' é estritamente crescente (decrescente) em (a, b). O resultado agora segue do teorema anterior.

Exemplo

Estude a concavidade de $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ e esboce o gráfico.

Solução: Note que $f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$ e $f''(x) = (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Como $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ para todo x, o sinal de f'' é dado pelo sinal de $x^2 - 1$. Portanto,

- $f''(x) > 0$ em $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty)$ $\Rightarrow$ f é côncava para cima em $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty)$,
- $f''(x) < 0$ em $(-1, 1)$ $\Rightarrow$ f é côncava para baixo em $(-1, 1)$.



Pontos de Inflexão

Definição

Seja f uma função contínua em $p \in D_f$. Diremos que p é **ponto de inflexão de** f *se*

(i) *Existirem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $p \in (a, b) \subset D_f$.*

(ii) *f for differenciável em x para $x \in (a, b)$, $x \neq p$.*

(iii) *f tiver concavidade para baixo (para cima) em (a, p) e para cima (para baixo) em (p, b).*

Ou seja, um ponto de inflexão é um ponto onde a concavidade da função muda.

Exemplo

Os pontos $x = -1$ e $x = 1$ são pontos de inflexão de $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

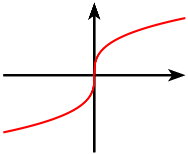
Recorde que que $f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$ e $f''(x) = (x^2 - 1)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Exemplo

$x = 0$ é um ponto de inflexão de $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

De fato: Vimos que $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ é contínua em toda a reta.

- Para $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ e $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$.
- Logo $f''(x) > 0$ se $x < 0$ e $f''(x) < 0$ se $x > 0$.



Exercício: Mostre que $x = 0$ é um ponto de inflexão de

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0. \end{cases}$$

Definição

Se f for derivável em $p \in (a, b)$ e p for um ponto de inflexão de f, diremos que p é um ponto de inflexão horizontal, se $f'(p) = 0$. Caso contrário diremos que p é um **ponto de inflexão oblíquo**.

Observação: Os pontos de inflexão horizontais são pontos críticos, enquanto que os pontos de inflexão oblíquos não os são.

Exemplo

$x=-1$ e $x=1$ são pontos de inflexão oblíquos de $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Recorde que que $f'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$ e $f''(x)=(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Exemplo

O ponto $x=0$ é um ponto de inflexão horizontal de $f(x)=x^3$.

Recorde que que $f'(x)=3x^2$ e $f''(x)=6x$.

Corolário

Se f for duas vezes diferenciável em (a, b) e $p \in (a, b)$ for um ponto de inflexão de f, então $f''(p) = 0$.

De fato: Defina, para $x, s \in (a, b)$, $r(x, s) = f(x) - T_s(x)$. Suponha que, $r(x, s) < 0$ se $x, s \in (a, p)$ e $r(x, s) > 0$ se $x, s \in (p, b)$. Como f' é contínua em (a, b), passando o limite quando $s \to p^{\pm}$ em

$$f(x) - T_s(x) = f(x) - f(s) - f'(s)(x - s),$$

do Teorema da Comparação, segue que $r(x, p) = f(x) - T_p(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, p)$ e $r(x, p) \geq 0$ para todo $x \in (p, b)$. Recorde que

$$0 \leq \frac{f(x) - T_p(x)}{x - p} = \frac{f(x) - f(p) - f'(p)(x - p)}{x - p} = f'(c) - f'(p).$$

para algum c entre x e p. Dividindo por $c - p$ e fazendo o limite quando $x \to p^{\pm}$ obtemos que $f''(p) = 0$.

Em geral não vale a volta. Basta considerar a função $f(x) = x^4$. No entanto, se a derivada segunda for estritamente monótona então vale a volta e, em particular,

Teorema

Seja f três vezes diferenciável em (a, b) com derivada terceira contínua. Se $p \in (a, b)$ for tal que $f''(p) = 0$ e $f'''(p) \neq 0$, então p será um ponto de inflexão de f.

De fato: Como $f'''(p) = (f'')'(p) \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que f'' é estritamente monótona, para todo $x \in (p-\delta, p+\delta)$. Do fato que $f''(p) = 0$, segue que o sinal de f'' em $(p - \delta, p)$ é o oposto do sinal de f'' em $(p, p + \delta)$. Assim, p é um ponto de inflexão pois há uma mudança de concavidade em p pelo critério de concavidade.

Pontos Extremos: Critérios envolvendo derivadas

Teorema

Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável em (a,b) e $p \in [a,b]$.

(i) *Se $f'(p) = 0$ e f' for crescente em (a,b), então p será um ponto de mínimo local de f.*

(ii) *Se $f'(p) = 0$ f' for decrescente em (a,b), então p será um ponto de máximo local de f.*

De fato: *(i) $f'(x) \leq 0$, para $x \in [a,p]$, e $f'(x) \geq 0$, para $x \in [p,b]$. Logo, do f é decrescente em $[a,p]$ e crescente em $[p,b]$. Segue que $f(p) \leq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$. A verificação de (ii) é análoga.*

Proposição (Critério da derivada segunda)

Suponha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tenha derivadas até ordem dois contínuas em (a, b) e que $p \in (a, b)$.

(i) *Se $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0$, então p será um ponto de mínimo local de f.*

(ii) *Se $f'(p) = 0$ e $f''(p) < 0$, então p será um ponto de máximo local de f.*

De fato: Em ambos os casos, do Teorema da Conservação do Sinal, existe $\delta > 0$ tal que $(f')'(x)$ tem o mesmo sinal de $f''(p)$, para todo $x \in (p - \delta, p + \delta)$.

Assim, no caso (i) f' é estritamente crestence em $(p - \delta, p + \delta)$ e no caso (ii) f' é estritamente decrestence em $(p - \delta, p + \delta)$.

O resultado agora segue do Teorema anterior.

Análise do gráfico de uma função f: Estratégia

- Determinamos, se possível, os pontos onde f se anula e os intervalos onde f é positiva e onde f é negativa.
- Determinamos, caso existam, as assíntotas horizontais e verticais de f.
- Calculamos f' e determinamos, se possível, os pontos críticos de f (zeros de f' e pontos onde f' não existe).
- Estudamos o sinal de f' e determinamos os intervalos onde f é crescente ou decrescente.
- Calculamos, se possível, f'' e f''' e classificamos os pontos críticos e encontramos os pontos de inflexão.
- Analisamos o sinal de f'' para determinar a concavidade em cada intervalo.

Exemplo

Nos casos abaixo, encontre e classifique os pontos críticos de f

$$(a)\ f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3; \qquad (b)\ f(x) = x^2 e^{-5x}.$$

Solução: (a) Note que,

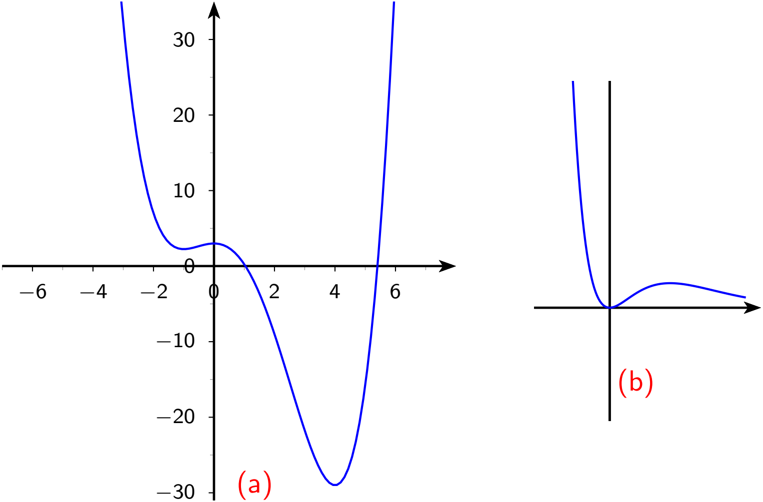
$$f'(x) = x^3 - 3x^2 - 4x = x(x^2 - 3x - 4) \quad \text{e} \quad f''(x) = 3x^2 - 6x - 4.$$

Portanto, $x = -1$, $x = 0$ e $x = 4$ são os pontos críticos de f. Como $f''(-1) = 5$, $f''(0) = -4$ e $f''(4) = 20$ concluímos que 0 é ponto de máximo e -1 e 4 são pontos de mínimo.

(b) Note que,

$$f'(x) = (2x - 5x^2)e^{-5x} \quad \text{e} \quad f''(x) = (2 - 20x + 25x^2)e^{-5x}.$$

Portanto, $f'(0) = 0 = f'(\frac{2}{5})$, $f''(0) = 2$ e $f''(\frac{2}{5}) = -2e^{-2} < 0$. Assim, $x = 0$ é ponto de mínimo $x = \frac{2}{5}$ é ponto de máximo.


30
20
10
0
−10
−20
−30
−6
−4
−2
0
2
4
6
(a)
(b)

Exemplo

Esboce o gráfico de $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$.

Solução: Note que $f(0) = f(6) = 0$ e que $f(x) > 0$ se $x < 6$ e $f(x) < 0$ se $x > 6$. Calculando as derivadas

$$f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}.$$

Os pontos críticos são $x = 4$, $x = 0$ e $x = 6$.

Analisando o sinal da derivada primeira

- Se $x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ é estritamente decrescente.
- Se $0 < x < 4 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ é estritamente crescente.
- Se $4 < x < 6 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ é estritamente decrescente.
- Se $x > 6 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ é estritamente decrescente.

Pelo teste da Derivada Primeira

- $x = 0$ é um ponto de mínimo local.
- $x = 4$ é um ponto de máximo local.

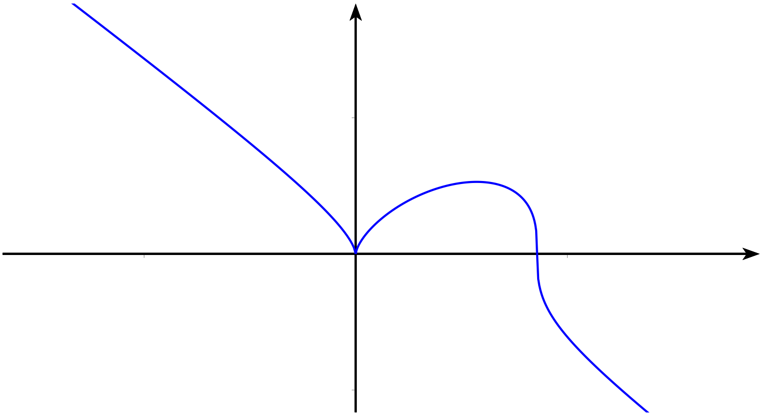
Observe que o teste da Derivada Segunda poderia ser usado em 4, mas não em 0.

$$f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}, \qquad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}.$$

Analisando o sinal da derivada segunda

- Se $x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f$ tem concavidade para baixo.
- Se $0 < x < 6 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f$ tem concavidade para baixo.
- Se $x > 6 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f$ tem concavidade para cima.

O único ponto de inflexão é $x = 6$. Observe que as retas tangentes em $x = 0$ e $x = 6$ são verticais.



Exemplo

Esboce o gráfico de $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

Note que, $f(-1)=0$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Derivando

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3-1}{x^2}, \quad f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3+1)}{x^3}.$$

Os pontos críticos são $x = 0$ e $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Analisando o sinal da derivada primeira

- $f'(x) > 0$ se $x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow f$ é crescente em $(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty)$.
- $f'(x) < 0$ se $x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow f$ é decrescente em $(-\infty, 0)$ e $(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$.

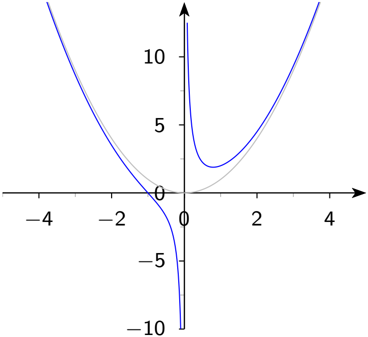
Pelo teste da Derivada Primeira ou Segunda $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ é um ponto de mínimo local.

Analisando o sinal da derivada segunda

$$f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3+1)}{x^3}.$$

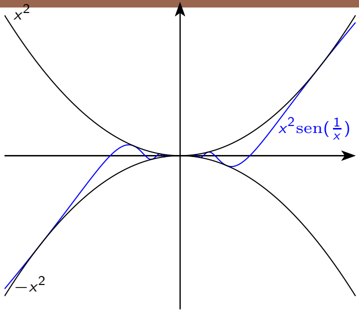
- Se $-1 < x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f$ é côncava para baixo.
- Se $x > 0$ ou $x < -1 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f$ é côncava para cima.

O único ponto de inflexão é $x = -1$.



Observações: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável em (a, b). Recorde que

- Se $f'(p) = 0$, p pode ser um ponto extremo local, um ponto de inflexão horizontal ou nenhum desses.
- Se $f'(p) \neq 0$, $p \in (a, b)$, p não será ponto extremo local de f.



Entretanto,

- Pode ocorrer que p seja um ponto extremo local de f sem que exista $f'(p)$ ou $f'(p) \neq 0$. Neste caso, $p = a$ ou $p = b$.