Anti-derivadas ou Primitivas: Substituição e Integração por partes Aula 23

13 de Novembro 2023

Segundo Semestre de 2023

Anti-derivadas ou Primitivas

Sabemos que a derivada de uma função constante é zero.

Entretanto, uma função pode ter derivada zero em todos os pontos de seu domínio e não ser constante; por exemplo $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ é tal que $f'(x) = 0$ em todo ponto de seu domínio, mas não é constante.

No entanto vale o seguinte resultado

Corolário

Se f for contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) e $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f será constante.

Prova: Seja $x_0 \in [a, b]$ fixo. Para todo $x \in [a, b]$, $x \neq x_0$, pelo Teorema do Valor Médio existe um $\bar{x}$ pertence ao intervalo aberto de extremos x e x_0 tal que

$$f(x) - f(x_0) = f'(\bar{x})(x - x_0).$$

Como $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, temos que $f'(\bar{x}) = 0$, logo

$$f(x) - f(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(x_0)$$

para todo $x \in [a, b]$. Portanto, f é constante. $\square$

Corolário

Duas funções $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$ diferem por uma constante.

Definição

Uma **primitiva** *ou* **anti-derivada** *de f definida em um intervalo I é uma função derivável F definida em I tal que $F'(x) = f(x), \forall x \in I$.*

Observação: Se F for uma primitiva de f, então F será contínua, pois F é derivável. Duas primitivas de uma função definida em um intervalo diferem por uma constante.

Segue que as primitivas de f são da forma $F(x) + k$, com k constante. Denotamos por

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k, \quad k \text{ constante}$$

à *família* de primitivas ou **integral indefinida de f**.

Exemplo

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + k, \qquad \int dx = \int 1\,dx = x + k.$$

Das fórmulas de derivação já vistas seguem as seguintes primitivas

(a) $\displaystyle\int c\,dx = cx + k;$

(b) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + k;$

(c) $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k,\ \alpha \neq -1;$

(d) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + k;$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + k,\ \ x > 0;$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + k,\ \ x < 0;$

(g) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + k;$

(h) $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + k;$

(i) $\displaystyle\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + k;$

(j) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + k;$

(k) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + k.$

Mudança de Variável ou Regra da Substituição

Sejam f e g tais que $Im(g) \subset D_f$. Suponhamos que F seja uma primitiva de f.

Então $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x))g'(x)$, de fato, pela Regra da Cadeia,

$$[F(g(x))]' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Portanto,

$$\int f(g(x))g'(x)\ dx = F(g(x)) + k,$$

onde k é uma constante arbitrária.

Se fizermos a *mudança de variável* ou *substituição* $u = g(x)$ temos

$$\int f(g(x))g'(x)\ dx = \int F'(g(x))g'(x)\ dx = \int [F(g(x))]'\ dx$$

$$= F(g(x)) + k = F(u) + k = \int f(u)\, du,$$

recordando que $F' = f$. Assim, temos a **Regra da Substituição**:

$$\boxed{\int f(\underbrace{g(x)}_{u})\underbrace{g'(x)\ dx}_{du} = \int f(u)\ du = F(u) + k = F(g(x)) + k.}$$

Exemplo

Encontre $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx.$

Solução: Fazemos a substituição $u = 1 + x^2$, então sua diferencial é $du = 2xdx$. Pela Regra da Substituição, se $f(x) = \sqrt{x}$

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int f(\underbrace{1+x^2}_{u})\,\underbrace{2x\,dx}_{du} = \int f(u)\,du$$

$$= \int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2} + k = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} + k.$$

Exemplo

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + k \quad e \quad \int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + k;$$

Solução: Note que, se $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \sec x + \operatorname{tg} x$, então e $g'(x) = \sec x(\sec x + \operatorname{tg} x)$ e $F(x) = \ln|x|$ é uma primitiva de f e

$$\begin{aligned}\int \sec x\, dx &= \int \frac{1}{\sec x + \operatorname{tg} x} \sec x(\sec x + \operatorname{tg} x) dx \\ &= \int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + k = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + k\end{aligned}$$

Analogamente, se $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \ln|x|$, $g(x) = \cos x$ e $g'(x) = -\operatorname{sen} x$,

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\int f(g(x))g'(x)dx = -F(g(x)) + k = -\ln|\cos x| + k$$

Exemplo

Encontre $\int x^3 \cos(x^4 + 2)\, dx.$

Solução: Fazemos a substituição $u = x^4 + 2$, então $du = 4x^3\, dx$ e

$$\boxed{\int \frac{1}{4} \cos(\underbrace{x^4 + 2}_{u})\ \underbrace{4x^3\, dx}_{du}} = \int \frac{1}{4} \cos(u)\, du = \frac{1}{4} \int \cos u\, du$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{sen} u + k \boxed{= \frac{1}{4} \operatorname{sen}(x^4 + 2) + k.}$$

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx.$

Solução: Se fizermos $u = x^2$, teremos $du = 2x\,dx$, assim,

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \int \frac{1}{1+u^2}\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(u) + k = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(x^2) + k.$$

Integração por Partes

Sejam $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferenciáveis. Então, se $x \in (a, b)$,

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

ou seja,

$$f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - f'(x)g(x).$$

Como $f(x)g(x)$ é uma primitiva de $[f(x)g(x)]'$,

- encontrar uma primitiva para $f'(x)g(x)$, é equivalente a
- encontrar uma primitiva para $f(x)g'(x)$

e vale a **fórmula de integração por partes**:

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx\,.}$$

Notação alternativa. Tomando $u = f(x)$ e $v = g(x)$, temos

$$du = f'(x)\,dx \quad \text{e} \quad dv = g'(x)\,dx$$

e podemos re-escrever a fórmula de integração por partes como

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du\,.}$$

Example

Calcule $\displaystyle\int x \,\mathrm{sen}\, x \, dx$.

Solução: Suponha $f(x) = x$ e $g'(x) = \mathrm{sen}\, x$. Então, $f'(x) = 1$ e $g(x) = -\cos x$. Assim

$$\int x \,\mathrm{sen}\, x \, dx = x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x)\, dx = -x \cos x + \mathrm{sen}\, x + k.$$

Example

Calcule $\displaystyle\int \ln x\, dx.$

Solução:

$$\int \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{\ln x}_{u} \cdot \underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}\, dx}_{du} = x \ln x - x + k.$$

Example

Calcule $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x \, dx.$

Solução:

$$\boxed{\int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u} \underbrace{1\, dx}_{dv}} = (\operatorname{arctg} x)\, x - \int x \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$= (\operatorname{arctg} x)\, x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\underbrace{1+x^2}_{u}} \underbrace{2x\, dx}_{du}$$

$$\boxed{= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + k.}$$

Example

Calcule $\int x^2 e^x \, dx.$

Solução:

$$\int \underbrace{x^2}_{f} \underbrace{e^x}_{g'} \, dx = \underbrace{x^2}_{f} \underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{2x}_{f'} \underbrace{e^x}_{g} \, dx.$$

Integrando por partes mais uma vez, obtemos

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x + k.$$

Portanto,

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + k.$$