Lista de Exercícios de SMA353-Cálculo I - Módulo 2

Exercícios iniciais: 2, 13, 23, 25, 30, 37, 46, 50, 53, 60, 71, 74, 83 e 86.

Limite de uma função e Propriedades dos limites

Exercício 1 *Se* $f(1) = 2$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ *deve existir? Em caso afirmativo, deve ser* $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$*? Podemos concluir algo sobre* $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$*? Explique e faça um desenho.*

Exercício 2 *Determine os seguintes limites.*

(a) $\lim\limits_{t\to -1} \dfrac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}}{x}$

Exercício 3 *Suponha que* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 5$ *e* $\lim\limits_{x\to c} g(x) = -2$*. Determine:*

(a) $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to c} 2f(x)g(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to c}(f(x)+g(x))$

(d) $\lim\limits_{x\to c}(f(x)+3g(x))$

(e) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{f(x)-g(x)}$

(f) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Exercício 4 *Explique por que o limite* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}$ *não existe.*

Teorema do Confronto

Exercício 5 *Seja* f *uma função definida em* $\mathbb{R}$ *tal que para todo* $x \neq 1$,

$$-x^2+3x \leq f(x) < \frac{x^2-1}{x-1}$$

Calcule $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ *e justifique.*

Exercício 6 *Sejam* f *e* g *funções com mesmo domínio* A *tais que* $\lim\limits_{x\to p} f(x) = 0$ *e* $|g(x)| \leq M$ *para todo* x *em* A*, onde* $M > 0$ *é um número real fixo. Prove que*

$$\lim_{x\to p} f(x)g(x) = 0$$

Exercício 7 *Calcule, caso exista* $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, *onde* f *é dada por*

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ *(b)* $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Dica: *Item (a) é teorema do confronto.*

Exercício 8 *Prove que:*

(a) $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} |f(x)| = 0$ *(b)* $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{|h|} = 0$

Exercício 9 *Empregue o Teorema do Confronto para mostrar que*

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3+x^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0.$$

Exercício 10 *Se* $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$ *para* $x \geq 0$, *encontre* $\lim_{x\to 4} f(x)$.

Limite Fundamental e Limites Trigonométricos

Exercício 11 *Calcule.*

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{\operatorname{sen}(3x)}$

(b) $\lim_{x\to 0} (1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{x - x\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(2x)}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{x + \operatorname{sen}(x)}{x^2 - \operatorname{sen}(x)}$

Exercício 12 *Determine os limites nos seguintes exercícios.*

(a) $\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{2}\theta)}{\sqrt{2}\theta}$

(b) $\lim_{y\to\infty} \operatorname{sen}(y)$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x + \operatorname{sen}(x)}{2x}$

(d) $\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(2\theta)}$

(e) $\lim_{\theta\to 0} \theta\cos(\theta)$

Definição formal de limite

Exercício 13 *Mostre, pela definição (usando* ε*'s e* δ*'s), que:*

(a) $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ *(b)* $\lim_{x\to -2} (4x+1) = -7$

Exercício 14 *Mostre, pela definição (usando* ε*'s e* δ*'s), que a função* f *é continua no ponto dado:*

(a) $f(x) = -3x$ *em* $p = 1$*;* *(b)* $f(x) = \sqrt{x}$ *em* $p = 4$.

Limites e indeterminações

Exercício 15 *Limites do tipo* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *com o numerador e o denominador se aproximando de zero são chamados de* indeterminações do tipo 0/0. *Eles são delicados porque não podemos aplicar a regra do quociente. Se* f *e* g *são polinômios, então* $f(a) = g(a) = 0$*, e portanto* $x = a$ *é uma raiz do numerador e do denominador. Deste modo, podemos fatorá-los na forma* $(x - a)p(x)$*, com* p *sendo um polinômio de grau menor. Em alguns casos, isso permite eliminar a indeterminação, como no exemplo abaixo*

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{6 - 2x} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-1)}{-2(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x-1}{-2} = \frac{2}{-2}.$$

(Observe que o limite é só na última passagem.) *Utilize a ideia acima para calcular os limites a seguir.*

(a) $\lim\limits_{z\to 0} \frac{z^2 + 2z}{z}$ *(b)* $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x^2 - 6x + 4}{2 - x}$ *(c)* $\lim\limits_{t\to 1} \frac{t - 1}{t^3 - 1}$

Exercício 16 *O limite trigonométrico fundamental nos diz que* $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$. *Use esta informação para calcular os limites abaixo.*

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(6x)}{2x}$ *(b)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen}(9x)}$ *(c)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}$

Dica: para o item (c), multiplique o numerador e o denominador por $(\cos(x) + 1)$.

Exercício 17 *Suponha que* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ *. Calcule:*

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(3x)}{x}$ *(b)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x^2)}{x}$ *(c)* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x^2 - 1)}{x - 1}$

Exercício 18 *Calcule:*

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}$ *(b)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)}$ *(c)* $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x - \pi}$

Exercício 19 *Calcule:*

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{x}$ *(b)* $\lim_{x\to 0} \frac{7x}{6\,\text{sen}(x)}$ *(c)* $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$

(d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)-\text{sen}(x)}{\tan(x)-1}$ *(e)* $\lim_{x\to 2} \frac{\tan(\pi x)}{x-2}$ *(f)* $\lim_{x\to p} \frac{\tan(x-p)}{x^2-p^2}, p \neq 0$

(g) $\lim_{x\to p} \frac{\text{sen}(x)-\text{sen}(p)}{x-p}$ *(h)* $\lim_{x\to p} \frac{\tan(x)-\tan(p)}{x-p}$ *(i)* $\lim_{x\to 0} \frac{13^x-8^x}{x}$

(j) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\text{sen}(x)}{x^2}$ *(k)* $\lim_{x\to \infty} \text{arctg}(x^2-x^4)$ *(l)* $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$

Exercício 20 *Algumas indeterminações do tipo* 0/0 *podem ser resolvidas usando-se o artifício de multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado de um deles, conforme o exemplo abaixo*

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)}{(x-4)} \frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}.$$

(Observe que o limite é só na última passagem.) *Utilize a ideia acima para calcular os limites a seguir.*

(a) $\lim_{x\to 9} \frac{2\sqrt{x}-6}{x-9}$ *(b)* $\lim_{x\to 7} \frac{5-\sqrt{4+3x}}{7-x}$ *(c)* $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$

Exercício 21 *Calcule cada um dos limites abaixo.*

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^3-x^2+x-1}$ *(b)* $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ *(c)* $\lim_{x\to 0^-} \frac{x\text{sen}(x)}{1-\cos(x)}$

(d) $\lim_{x\to 0} x\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ *(e)* $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}}$ *(f)* $\lim_{x\to \pi} \frac{\text{sen}(x-\pi)}{x-\pi}$

(g) $\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a}$

Dica: no último, use a identidade $(x^n-y^n) = (x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$, *para* $n \in \mathbb{N}$

(h) Quando você aprender o limite de derivada, responda quais destes limites acima são derivadas de alguma função $f(x)$. *E quem é* $f(x)$ *em cada caso em que isso acontecer?*

Exercício 22 *Calcule* $\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h}$, *em cada um dos casos:*

(a) $f(x) = x^2$ *(b)* $f(x) = 3x+1$

Exercício 23 *Calcule* $\lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$, *em cada um dos casos:*

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$ *(b)* $f(x) = \frac{1}{x^2}$

c) Por que os limites $\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h}$, *e* $\lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$, *possuem os mesmos resultados? Comprove esse fato para o exemplo em que* $f(x) = x^2$. *Justifique porque tem que dar igual de forma geral, independente da função. Qual a mudança de variável para se convencer disto?*

d) Você sabe o que estes limites do item (c) tem a ver com derivada? (Eles são limites de taxa de variação média e darão taxa de variação instântanea, justifique isso quando você tiver aprendido este fato.)

Exercício 24 *Sejam* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *com* $g(x) \neq 0$, $\forall\, x$. *Prove que, se*

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,,$$

então existe $\delta > 0$ *tal que*

$$0 < |x - p\,| < \delta \implies |f(x)| < |g(x)|\,.$$

Exercício 25 *Prove que*

$$(a)\quad \lim_{x\to p} f(x) = L \iff \lim_{x\to p}(f(x) - L) = 0 \iff \lim_{x\to p} |f(x) - L| = 0$$

$$(b)\quad \lim_{x\to p} f(x) = L \implies \lim_{x\to p} |f(x)| = |L|$$

e que a volta pode não valer se $L \neq 0$. *Faça desenhos para pensar. Dica: use Exercício 7.*

$$(c)\quad \lim_{x\to p} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to p} |f(x)| = 0$$

Faça desenhos para pensar.

Exercício 26 *(Teorema do Confronto) Calcule* $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x}$ *sabendo que* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é tal que*

$$|g(x)| \leq x^4, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Exercício 27 *(Teorema do Confronto) Sejam* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *e suponha que*

$$|ax^2 + bx + c| \leq |x|^3, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Prove que devemos ter $a = b = c = 0$ *necessariamente.*

Exercício 28 *Mostre e verifique graficamente que*

(a) não existe $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ *(b) existe* $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Exercício 29 *Dê um exemplo de uma função* f *de maneira que* $\lim_{x\to p} |f(x)|$ *exista, mas* $\lim_{x\to p} f(x)$ *não exista.*

Exercício 30 *A afirmação*

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = \lim_{x\to p^-} f(x) \implies f \text{ é contínua em } p$$

é verdadeira? Justifique.

Exercício 31 *(Limites no infinito) Calcule:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^4 - 2x + 1}{4x^4 + 3x + 2}$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3 + 1}{x^4 + 2x + 3}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{3x + 2}$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x - 1}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$;

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^2 + 3}$;

(f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+3}\right)$;

Exercício 32 *Calcule:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{5 - x}{3 + 2x}$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(2x - \sqrt{x^2 + 3}\right)$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - 1}\right)$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} \frac{2x + 1}{x^2 + x}$;

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{2x + 1}{x^2 + x}$;

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{3x - 5}{x^2 + 3x - 4}$;

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$;

(h) $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} \frac{3x^2 - 4}{1 - x^2}$;

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^3 - x^2}$

(j) Quais as assíntotas horizontais ou verticais de cada item? Dê as equações de tais assíntotas.

Exercício 33 *(Limites no infinito) Calcule:*

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\dfrac{1}{x}$; *(b)* $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^4-3x+2$; *(c)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{5+\dfrac{2}{x}}$.

Exercício 34 *(Limites no infinito) Calcule:*

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^6-7x+3}{4x^6+x+5}$ *(b)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7x^4+1}{x^5+6x+1}$ *(c)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5}}{6x+1}$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^4+6x-1}}{\sqrt{3x^2+4x+1}}$ *(e)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^2+7}$ *(f)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+5}\right)$

(g) Quais as assíntotas horizontais de cada item? Dê as equações de tais assíntotas.

Exercício 35 *Seja n um inteiro positivo. Prove que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x}=+\infty$ pela definição.*

Exercício 36 *(Limites no infinito) Calcule:*

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} x-\sqrt[3]{2+3x^3}$ *(b)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sqrt{x+3}}{2x-1}$

(c) Mostre que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}$ *é diferente de* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}$.

Exercício 37 *Considere* $f(x)=\cos(x)$ *e* $g(x)=x\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$. *Calcule* $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$. *O que podemos dizer sobre* $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Exercício 38 *Calcule:*

(a) $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{|x-3|}{x-3}$ *(b)* $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{|x-3|}{x-3}$ *(c)* $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{|x-3|}{x-3}$ *(d)* $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$

Exercício 39

(a) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+5}{2x^3+4x-1}$.

(b) Mostre que existe $r>0$ tal que

$$x>r\Rightarrow 0<\frac{2x+5}{2x^3+4x-1}<\frac{1}{2}.$$

Exercício 40 *Calcule os seguintes limites:*

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right]$

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\left[(1-x)\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]$ (d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x^4+7}\right)$

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left[\ln\left(1+\frac{3}{x^2}\right)\right]$ (e) $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{tg}\left(\frac{\pi x^4}{(2x^4+3x+2)}\right)$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^x$ (g) $\lim\limits_{x\to\infty}\sec\left(\frac{\pi x^3+213}{(x^3+10x+1)}\right)$

Exercício 41 *Sabendo-se que* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{1-x^3}=6$ *e* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{g(x)}{1-x}=-10$, *é correto afirmar que:*

(a) *Nada se pode afirmar sobre* $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\cos\left(\frac{1}{x-1}\right)$ *e* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{g(x)}{1-x^2}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)=0$ *e* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=-3/5$.

(c) *Nada se pode afirmar sobre* $\lim\limits_{x\to 1} g(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)$ *e* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}$.

(d) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)=0$ *e* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=-9/5$.

(e) *Todas as outras alternativas são falsas.*

Exercício 42 (IME) *Dada a função racional* $f(x)=\dfrac{x^3+ax^2+bx+c}{mx^2+nx+p}$ *e sabendo que* $a, b, c, m, n, p\in\mathbb{Z}$ *e que:*

(a) $f(2)=0$

(b) *para* $x=-1$ *tem-se uma indeterminação do tipo* $\frac{0}{0}$

(c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-6$

(d) $x=1$ *é raiz do polinômio* mx^2+nx+p

(e) $f(3)=\dfrac{1}{f(4)}$

determine os coeficientes a, b, c, m, n, p.

Exercício 43 *Mostre os itens abaixo usando o teorema do Confronto:*

(a) Se f é limitada em uma vizinhança do ponto a e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$*, então* $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$*;*

(b) $\cos(x)$ *é função contínua.*

Exercício 44 *Dê exemplo de funções* f *e* g *tais que*

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = L,\ L \neq 0 \quad e \quad \lim_{x \to p^+} g(x) = 0,$$

mas o limite abaixo não dá ∞ *e nem* $-\infty$

$$\lim_{x \to p^+} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Exercício 45 *A resolução abaixo está incorreta. Indique onde os erros ocorrem e então calcule o limite corretamente.*

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - x$$

$$= \lim_{x \to \infty} x \underbrace{\left(\sqrt{1 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} - 1\right)}_{\to 0}$$

$$= \lim_{x \to \infty} x.0 = 0$$

Exercício 46 *Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.*

(a) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são funções tais que* f *é limitada e positiva e* $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$*, então tem-se que* $\lim_{x \to \infty} f(x)g(x) = \infty$*.*

(b) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são funções tais que* f *é limitada e* $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$*, então tem-se que* $\lim_{x \to \infty} f(x) + g(x) = \infty$*.*

(c) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são funções tais que* $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$*, então* $\lim_{x \to \infty} f(x) - g(x) = \infty$*.*

Exercício 47 *Dê exemplos de funções* f *e* g *tais que:*

(a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$*,* $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$ *e* $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$*;*

(b) $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$ *e* $\lim_{x\to 0} f(x) - g(x) = 1$;

(c) $\lim_{x\to 0} f(x) - g(x) = 0$ *e* $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 1$;

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ *e* $\lim_{x\to 0} f(x) - g(x) \neq 0$.

Exercício 48 *Em cada item abaixo, determine o maior conjunto onde a função* f *em questão é contínua.*

a) $f(x) = \dfrac{3x-5}{2x^2-x-3}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ c) $f(x) = \sqrt{2x-3} + x^2$

d) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{x-6}}$

Exercício 49 *Analise a continuidade das funções abaixo nos seus domínios.*

a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x-1}{x^2-1}} & , \text{ se } x \neq \pm 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & , \text{ se } x = 1 \\ 0 & , \text{ se } x = -1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{2-|x|} & , \text{ se } x \neq 2 \\ 1 & , \text{ se } x = 2 \end{cases}$

Exercício 50 *Sejam* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funções contínuas em* $\mathbb{R}$ *tais que* $f(3) = g(3)$. *Pergunta-se: a função* $h(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ se } x \leq 3 \\ g(x) & , \text{ se } x > 3 \end{cases}$ *é contínua em* $\mathbb{R}$*? Justifique sua resposta.*

Exercício 51 *Determine as constantes* A, B *de modo que a função*

$f(x) = \begin{cases} 3x & , \text{ se } x \leq 2 \\ Ax + B & , \text{ se } 2 < x < 5 \\ -6x & , \text{ se } x \geq 5 \end{cases}$ *seja contínua em* $\mathbb{R}$.

Exercício 52 *Encontre exemplos de funções tais que:*

a) $f + g$ *é contínua em* x_0 *mas* f *e* g *não são.*

b) $f \circ g$ *é contínua em* x_0 *mas* g *é descontínua em* x_0 *e* f *é descontínua em* $g(x_0)$.

c) f *é contínua em* $g(x_0)$, g *não é contínua em* x_0 *mas* $f \circ g$ *é contínua em* x_0.

Exercício 53 *Considere a função*

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 2 \\ \dfrac{x^2}{2}, & x < 2. \end{cases}$$

Calcule:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{g(x)-g(2)}{x-2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{g(x)-g(2)}{x-2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2}$ *(ou seja, a derivada de* $g(x)$ *em x=2, existe?)*

(d) A função $f(x) = \dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}$ *é contínua em 2? Por que?*

Exercício 54 *Calcule:*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{x}{\operatorname{sen}(x)-2x}\right)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-3x)}{x}\right)$

Exercício 55 *Considere* $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ *e* $h(y) = \begin{cases} 1 & , \textit{ se } y \geq 6 \\ g(y) & , \textit{ se } y < 6 \end{cases}$ *, onde* g *é dada de modo que* $h \circ f$ *e* $f \circ h$ *estão bem definidas.*
Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou não.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} h(f(x)) = h(\lim_{x\to 2} f(x))$ b) $\displaystyle\lim_{y\to 2} f(h(y)) = f(\lim_{y\to 2} h(y))$

Exercício 56 *Esboce as curvas transladadas dos itens (a) e (c) e conclua sobre os limites dos itens (b) e (d).*

(a) $y = 2^x - 1$ *e* $y = 2^{-x} - 1$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (2^x - 1)$

(c) $y = 1 - e^x$ *e* $y = 1 - e^{-x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (1 - e^{-x})$

Exercício 57 *Faça o gráfico das funções abaixo e verifique se possuem assíntotas justificando com os* ***limites apropriados****.*

(a) $y = e^{|x|}$ *(b)* $y = e^{-|x|}$ *(c)* $y = e^{x-3}$

Exercício 58 *Responda:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln(x)$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \ln(x)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} (\ln(x) - 5)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \ln(x-3)$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \ln(x-3)$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} 1 + \ln(x-3)$

Exercício 59 *Encontre o domínio de cada uma das funções abaixo.*

(a) $f(x) = \dfrac{1}{2+e^x}$

(b) $f(x) = \cos(e^{-x})$

(c) $f(x) = \dfrac{3}{1-e^{2x}}$

(d) $f(x) = \dfrac{1-e^{x^2}}{1-e^{1-x^2}}$

(e) $f(x) = \dfrac{1+x}{e^{\cos x}}$

Exercício 60 *Use as propriedades dos logaritmos para simplificar as expressões.*

(a) $\ln \operatorname{sen}(\theta) - \ln\left(\dfrac{\operatorname{sen}(\theta)}{5}\right)$

(b) $\ln(3x^2 - 9x) + \ln\left(\dfrac{1}{3x}\right)$

(c) $\ln \sec(\theta) + \ln\cos(\theta)$

(d) $\ln(8x+4) - 2\ln 2$

Exercício 61 *Resolva em* k*:*

(a) $e^{2k} = 4$

(b) $100e^{10k} = 200$

(c) $e^{\frac{k}{1000}} = a$

(d) $e^{5k} = \dfrac{1}{4}$

(e) $80e^{k} = 1$

(f) $e^{(\ln 0,8)k} = 0,8$

Exercício 62 *Resolva em* t*:*

(a) $e^{kt} = \dfrac{1}{10}$

(b) $e^{-0,01t} = 1000$

Exercício 63 *Se* $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln 2}{2}$*, é necessário que* $x = 2$*? Justifique sua resposta.*

Exercício 64 *Enuncie os seguintes teoremas:*

(a) *O Teorema do Anulamento;*

(b) *O Teorema do Valor Intermediário;*

(c) *O Teorema de Weierstrass.*

Exercício 65 (a) *Mostre que existe um número real* x_0 *tal que* $x_0^5 - 4x_0 + 1 = 7,21$*;*

(b) *Considere* $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funções contínuas tais que* $f(a) < g(a)$ *e* $g(b) < f(b)$*. Mostre que existe* $c \in]a,b[$ *tal que* $f(c) = g(c)$*.*

Exercício 66 *(a) Se* $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$*, mostre que existe* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x_0) = 100$*;*

(b) Mostre que a equação $x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x + 1 = 0$ *tem, pelo menos, uma raiz no intervalo* $]0, 1[$*.*

Exercício 67 *Dada a função* $f : [-2, 7] \to \mathbb{R}$*, definida por* $f(x) = \begin{cases} 4 - \frac{x^2}{2} & \text{, se } -2 \leq x < 4 \\ 2 & \text{, se } 4 \leq x \leq 7 \end{cases}$*, pergunta-se:* f *tem máximo e mínimo no intervalo* $[-2, 7]$*? Justifique sua resposta. No caso da resposta a questão acima ser negativa, pergunta-se: isto contradiz o Teorema do Valor Extremo? Justifique sua resposta.*

Exercício 68 *Mostre que a equação*

$$x^3 - \frac{1}{1 + x^4} = 0$$

admite pelo menos uma raiz real.

Exercício 69 *Seja* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{1 + x^2}.$$

(a) Prove que o valor máximo de f *é* $f(1)$*;*

(b) Mostre que existe $x_1 \in]-1, 0[$ *onde* $f(x_1)$ *é o valor mínimo de* f*.*

Exercício 70 *Seja* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *contínua, onde* I *é um intervalo qualquer. Então mostre que a imagem de* f *é um intervalo (observe que* $\{a\} = [a, a]$*).*

Exercício 71 *Seja* $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *contínua com* $f(a) < f(b)$*. Suponha que*

$$\forall\, s, t \in [a, b], \;\; s \neq t \implies f(s) \neq f(t).$$

Prove que f *é estritamente crescente (i.e.,* $\forall\, s, t \in [a, b]$*,* $s < t \implies f(s) < f(t)$*).*

Exercício 72 *Seja* f *uma função definida por*

$$f(x) = 2x^3 - \sqrt{x^2 + 3x}\,.$$

(a) Determine o domínio de f*;*

(b) Verifique que f *é contínua em* $[0, +\infty[$*;*

(c) *Mostre que a única raiz de* f *em* $[1, +\infty[$ *é o número real 1, e que* $f(2) > 0$ *e* $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$;

(d) *Verifique ainda que* $f(x) > 0$ *em* $]1, +\infty[$ *e que* $f(x) < 0$ *em* $]0, 1[$.

Exercício 73 *Um corredor parte do repouso e corre numa pista circular em uma único sentido. Ele para quando chega ao ponto de partida. Mostre que, pelo menos, uma vez durante esta volta, ele deve ter desenvolvido a mesma velocidade em pontos diametralmente opostos.*

Exercício 74 *Um alpinista começa a escalar uma montanha às 8:00 horas do sábado e chega ao topo às 16:00 horas do mesmo dia. Acampa no topo e desce às 8:00 horas do domingo, chegando no ponto original de saída às 16:00 horas. Mostre que em algum horário no domingo ele estava à mesma altura em que esteve no mesmo horário no sábado.*

Exercício 75 *Recordando: (a) Quais limites definem reta assíntota vertical? Qual é a equação da reta assíntota vertical?*
(b) Quais limites definem reta assíntota horizontal?
Isso tem a ver com o exercício 25? Qual é a equação da reta assíntota horizontal?
(c) Use limite e distância e defina reta assíntota inclinada da forma $y = ax + b$. *Essa definição serve também para o caso (a) ou (b)?*
(d) Por que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *não indica existência de assíntotas para* $y = f(x)$*?*

Exercício 76 *Calcule os seguintes limites. Lembre que* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ *(vale o mesmo para* $x \to -\infty$*), ou seja,* $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x-3}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x}$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{3x}$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_2(x+1)}{x}$ j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x}$ k) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{e^{x-3}-1}{2x-6}$ l) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{e^{-x}-1}$

m) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{x}}{-5x}$ n) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{e^{x+3}-e^3}$ o) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax}{e^{bx}-1}$

p) Esses limites definem assíntotas verticais ou horizontais? Quais as equações destas assíntotas?

Exercício 77 *(a) É verdade que* $e^{x^2} = e^{2x}$*? Explique com as regras de exponencial. Dê contra-exemplo.*

(b) Se $a > 0$*,* $a \neq 1$ *então* $a^{\log_a(x)} = x$ *e* $\log_a(a^x) = x$*. Por quê?*

Exercício 78 *Calcule:*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1-\cos(x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x+3)}{\ln(5x+7)+3}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x+3)}{\ln(5x^2+7)+3}$

d) Considere $f(x) = \ln(|\sqrt{4x^6+21} - 5|) + \ln\left(\frac{1}{|x^3-8|}\right)$*. Encontre o domínio de* f *e as assíntotas verticais e horizontais ao gráfico de* f*.*

Exercício 79 *Calcule:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (x^2 + \operatorname{sen}(10x))$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (x - \sqrt[3]{2+5x^4})$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \arctan\left(\frac{2x^5 - x}{5x^3 + x^2}\right)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \arccos\left(\frac{x^3 + x}{x^3 + x^2}\right)$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \arccos(x^2 - 2x^6)$ *faz sentido? Explique.*

Encontre as possíveis assíntotas de:

(f) $f(x) = \dfrac{x-7}{x^2+2x-8}$ *(g)* $f(x) = \sqrt{\dfrac{5^x}{3^x+2^x}}$

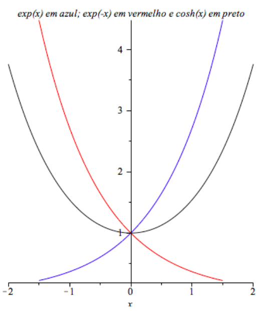


Figura 1: o gráfico de cosh(x) é metade da soma das outras duas funções.

Exercício 80 *Calcule* $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1-p}}$.

Dica: note a necessidade de dividir em casos $p < 1$, $p = 1$, $p > 1$.

Exercício 81 *Usando a base e, as funções hiperbólicas são definidas abaixo. A função* $\cosh(x)$ *modela estruturas da arquitetura ou contorno de objetos na natureza. Essa curva modelo é chamada catenária. Por exemplo, o fio entre dois postes de energia é uma catenária.*

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \ \operatorname{cosech}(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \ \coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Mostre que:

(a) $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$

(b) $e^x = \operatorname{senh}(x) + \cosh(x)$ *e* $e^{-x} = \cosh(x) - \operatorname{senh}(x)$.

(c) $\operatorname{arcsenh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$, *é a função inversa do* $\operatorname{senh}(x)$.

(d) $\cosh(x)$ *é uma função par e que* $\operatorname{senh}(x)$ *e* $\tanh(x)$ *são ímpares.*

(e) $\tanh(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

(f) $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senh}(y)$ *e* $\operatorname{senh}(2x) = 2\operatorname{senh}(x)\cosh(x)$;

(g) $1 - \operatorname{tgh}^2(x) = \operatorname{sech}^2(x)$.

(h) Rever abaixo: o gráfico de senh, cosh *e* tgh.

(i) Determine as condições para que senh, cosh *e* tgh *sejam inversíveis e encontre suas inversas.*

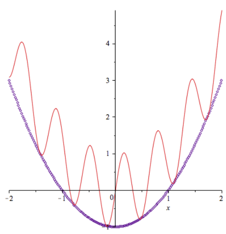


Figura 2: Dica para exercício 79(a): Gráficos de $y = x^2 - 1$ e de $y = x^2 + \operatorname{sen}(10x)$.

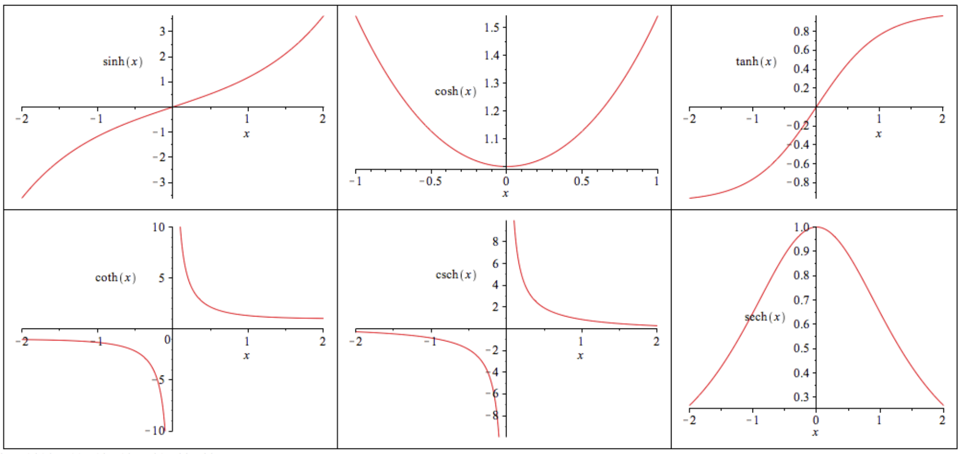


Figura 3: Gráficos das funções hiperbólicas:(a) Seno hiperbólico, (b) cosseno hiperbólico, (c) tangente hiperbólica, (d) cotangente hiperbólica, (e) cossecante hiperbólica, (f) secante hiperbólica. Software: Maple.

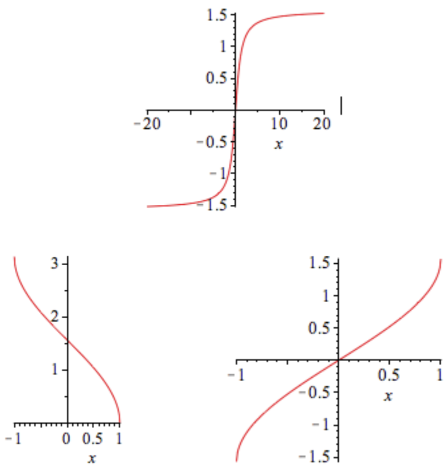


Figura 4: (1) arco tangente, domínio $\mathbb{R}$; (2) arco cosseno, domínio [-1,1]; (3) arco seno, domínio [-1,1]. Fonte: maple.

Relembrando o limite da derivada

Quase todos os itens dos exercícios (82) e (83) reforçam o estudo de fatos importantes da construção do conceito de derivada. Lembre que estes limites são sempre da forma $\frac{0}{0}$ (comprove). O quociente que aparece neste limites é a velocidade média de um problema num determinado contexto.

Exercício 82 *Calcule* $f'(p) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(p+h) - f(p)}{h}$, *em cada um dos casos:*

(a) $f(x) = x^2$.

(b) $f(x) = 3x + 1$.

(c) Calcule $f'(2)$ *e* $f'(1/3)$ *para o item (a). O que eles significam no gráfico de* $f(x) = x^2$*? Ilustre. Refaça estes passos também para o item (b).*

(d) Nas respostas dos itens (a) e (b), troque p *por* x *e assim você obterá a função* $f'(x)$.

(e) Considere a velocidade $v(x) = f'(x)$*, usando limite encontre a função aceleração:* $a(x) = f''(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{v(x+h) - v(x)}{h}$*, para a função* $f(x) = x^3$.

Exercício 83 *Em um certo planeta, um objeto é lançado verticalmente do chão para cima com velocidade inicial de* $112\,\mathrm{m/s}$ *e a altura atingida no instante* t *segundos é* $f(t) = 112t - 16t^2$ *metros. Pergunta-se:*
a) Quais as velocidades do objeto nos instantes $t = 2$*,* $t = 3$ *e* $t = 4$ *segundos?*
b) Em que instante o objeto alcança a altura máxima?
c) Em que instante o objeto atinge o chão?
d) Com que velocidade o objeto atinge o chão?

Exercício 84 *Em cada um dos itens abaixo, encontre, se existir, a equação da reta tangente ao gráfico da função* $f(x)$ *nos pontos* $P = (x_0, f(x_0))$ *especificados:*

a) $f(x) = 5x + 4$, $P_1 = (2, 14)$ *e* $P_2 = (1, 9)$ b) $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$, $P_1 = (0, 100)$ *e* $P_2 = (1, 2)$
c) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $P = (0, 0)$

Exercício 85 *Determine as abscissas dos pontos do gráfico de* $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ *nas quais a tangente é: a) horizontal b) paralela à reta* $2y + 8x - 5 = 0$.

Exercício 86 *a) Determine* A*,* B*, e* C *de modo que as curvas* $y = x^2 + Ax + B$ *e* $y = Cx - x^2$ *sejam tangentes uma a outra no ponto* $(1, 0)$.
b) Encontre a equação da reta tangente e da reta normal à curva $y = x^3 - 2x^2 + 4$ *no ponto* $(2, 4)$.

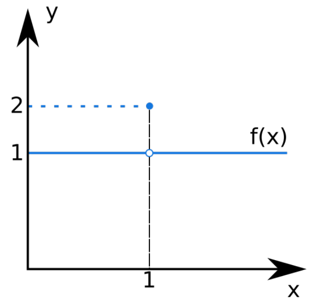
Gabarito da Lista de Exercícios de SMA353-Cálculo I - Módulo 2

Última atualização em 14/04/2022

Exercício 1 *O limite pode não existir. Caso exista não necessariamente deve ser 2, veja por exemplo*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \neq 1 \\ 2, & se\ x = 1 \end{cases},$$

representada pelo gráfico



Nela $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 = \lim_{x\to 1^-}$, *assim* $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$. *Contudo* $f(1) = 2$ *e portanto, não podemos dizer nada sobre a existência de* $\lim_{x\to 1} f(x)$ *e nem sobre seu possível valor (caso exista).*

Exercício 2 *(a)*

$$\lim_{t\to -1} \frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2} = \lim_{t\to -1} \frac{(t+1)(t+2)}{(t+1)(t-2)}$$

$$\lim_{t\to -1} \frac{t+2}{t-2} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)+(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{-1\cdot 1} = -2$$

Exercício 3 *(a) Se os limites de* $f(x)$ *e* $g(x)$ *para* $x \to c$ *existem, então* $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = 5 \cdot -2 = -10$

(b) Se o limite de $f(x)g(x)$ *existe para* $x \to c$, *então* $\lim_{x\to c} \alpha \cdot f(x)g(x) = \alpha \cdot \lim_{x\to c} f(x)g(x)$, *sendo* $\alpha = 2$ *temos que* $\lim_{x\to c} 2f(x)g(x) = 2\lim_{x\to c} f(x)g(x) = -20$

(c) Se os limites de $f(x)$ *e* $g(x)$ *para* $x \to c$ *existem, então* $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = 5 + -2 = 3$

(d) Juntando as regras em (b) e (c) temos que $\lim_{x\to c}(f(x)+3g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} 3g(x) = \lim_{x\to c} f(x) + 3 \cdot \lim_{x\to c} g(x) = 5 + 3 \cdot -2 = -1$

(e) *Se os limites de* $f(x)$ *e* $f(x)-g(x)$ *para* $x \to c$ *existem, sendo* $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) \neq 0$, *então* $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{(f(x)-g(x))} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c}(f(x)-g(x))} = \frac{5}{5-(-2)} = \frac{5}{7}$

(f) *Parecido com a (e), se os limites de* $f(x)$ *e* $g(x)$ *para* $x \to c$ *existem, sendo* $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$, *então* $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$

Exercício 4 *Os limites laterais dessa função são*

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty \qquad e \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

Pelo limite de $x \to 1$ *ter que ser igual a ambos os laterais e mais ainda ser um número real, concluímos que o* $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$ *não existe.*

Exercício 5 *Chamemos*

$$-x^2 + 3x = g(x)$$

$$e$$

$$\frac{x^2-1}{x-1} = h(x),$$

temos que $f(x)$ *é limitada por* $g(x)$ *e* $h(x)$*, e que, de acordo com o Teorema do Confronto, se*

$$\lim_{x\to c} g(x) = L = \lim_{x\to c} h(x)$$

o $\lim_{x\to c} f(x)$ *será também igual a* L*. Assim, temos que verificar se* $\lim_{x\to 1} f(x)$ *é uma dessas situações:*

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} -x^2 + 3x = -1 + 3 = 2$$
$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

Como o limite de $g(x)$ *e* $h(x)$ *tendendo a 1 são iguais a 2, o* $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

Exercício 6 *Pela questão,* $|g(x)| \leq M$ *para* $x \in A$*, isso significa que* $-M \leq g(x) \leq M$ *para* $x \in A$*, ou seja,* g *é uma função limitada no seu dominio* A*. Agora, pela definição de limite, temos que*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in A, 0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \epsilon.$$

Com isto, dado $\epsilon > 0$ *arbitrário, temos que a definição de limite se cumpre em particular para* $\frac{\epsilon}{M}$*, isto é, que para* $\frac{\epsilon}{M} > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que se* $x \in A, 0 < |x-p| < \delta$ *então* $|f(x)| < \frac{\epsilon}{M}$*. Observamos que se* g *for a função nula, temos provado o que nos pedem automaticamente. Então suponha que* g *é não nula. Neste caso vamos ter que*

$$|f(x)||g(x)| < \frac{\epsilon}{M}|g(x)| \leq \epsilon$$

se $x \in A$ *e* $0 < |x - p| < \delta$. *Assim, observando que o domínio de* fg *é* A *por hipótese, temos provado em resumem que*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in A, 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x)g(x)| < \epsilon,$$

o que significa que $\lim_{x \to p} f(x)g(x) = 0$.

Exercício 7 *(a) Temos que* $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. *Mas como* $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *é limitada entre* $[-1, 1]$ *e se* $x \geq 0$,

$$-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x.$$

Agora, se x *for negativo, teríamos analogamente que*

$$-x \geq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq x.$$

Logo, como $\lim_{x\to 0} x = 0$, *temos pelo Teorema do Confronto em ambas desigualdades anteriores que* $\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x \sin(\frac{1}{x})-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x \sin(\frac{1}{x})}{x} = \lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$. *Fazendo a mudança de variável* $t = \frac{1}{x}$, *o limite se reescreve como*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{t\to\infty} \sin t.$$

Portanto, como pode ser observado graficamente, o valor de $\sin t$ *oscila entre -1 e 1 e não converge para nenhum valor fixo. Assim, o limite não existe.*

Exercício 8 *(a) (⇒) Se* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, *temos por definição de limite que*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in \mathrm{Dom}f, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \epsilon.$$

E como sabemos da desigualdade vista no Exercício 7 da Lista do Modulo 1, $||f(x)| - 0| \leq |f(x)|$. *Assim, obtemos por definição de limite que*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in \mathrm{Dom}f, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow ||f(x)| - 0| \leq |f(x)| < \epsilon,$$

isto é, $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$.

(⇐) Se $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$, *logo* $\lim_{x\to a} -|f(x)| = 0$. *Temos também que, desde que* $|f(x)| \leq |f(x)|$ *logo*

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \ \forall x \in \mathrm{Dom}f.$$

Assim, pelo Teorema do Confronto, obtém-se que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

(b) $(\Rightarrow)$ *Se* $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=0$*, então pela ida do item (a) vamos ter que* $\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h)}{h}\right|=0$*. E como* $\left|\frac{f(h)}{h}\right|=\left|\frac{f(h)}{|h|}\right|$*, vamos ter que* $\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h)}{|h|}\right|=0$*. Mas pela recíproca do item (a), isto implica que* $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{|h|}=0$*.*

$(\Leftarrow)$ *Se* $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{|h|}=0$*, temos pela ida do item (a) que* $\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h)}{h}\right|=\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h)}{|h|}\right|=0$*. E pela recíproca do item (a) obtém-se que* $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=0$*.*

Exercício 9 *Note que para todo* $x\in\mathbb{R}$ *vale*

$$-\sqrt{x^3+x^2}\leq\sqrt{x^3+x^2}\sin\frac{\pi}{x}\leq\sqrt{x^3+x^2},$$

e como $\lim_{x\to 0}\pm\sqrt{x^3+x^2}=0$*, concluímos pelo Teorema do Confronto que*

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^3+x^2}\sin\frac{\pi}{x}=0.$$

Exercício 10 *Essa questão é parecida com a 5, portanto, para saber se* $\lim_{x\to 4}f(x)$ *pode ser encontrada pelo Teorema do Confronto geradas pelas funções que a limitam, o* $\lim_{x\to 4}4x-9$ *tem que ser igual ao* $\lim_{x\to 4}x^2-4x+7$*. Pelo* $\lim_{x\to 4}4x-9=4\cdot 4-9=7$ *e* $\lim_{x\to 4}x^2-4x+7=4^2-4\cdot 4+7=16-16+7=7$ *serem iguais, então o* $\lim_{x\to 4}f(x)=7$*, de acordo com o teorema.*

Exercício 11 *(a)* $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)}{\sin(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)\cdot\cos(2x)}$*, então pelo limite trigonométrico fundamental* $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ *temos que* $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)}{\sin(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)\cdot\frac{2x}{\sin(2x)}}{\sin(3x)\cdot\frac{3x}{\sin(3x)}\cos(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x\cos(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3\cos(2x)}$*. Pelo* $\lim_{x\to 0}\cos(2x)=1$*, determinamos que* $\lim_{x\to 0}\frac{2}{3\cos(2x)}=\frac{2}{3}$*.*

(b) $\lim_{x\to 0}(1-x)\tan(\frac{\pi x}{2})=\lim_{x\to 0}(1-x)\frac{\sin(\frac{\pi x}{2})}{\cos(\frac{\pi x}{2})}$*. Como em (a), podemos reescrever o limite como* $\lim_{x\to 0}\frac{\pi x}{2}(1-x)/\cos(\frac{\pi x}{2})$*, e pelo* $\lim_{x\to 0}\cos(\frac{\pi x}{2})=1$*, temos* $\lim_{x\to 0}(1-x)\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi x^2}{2}$*, e assim determinamos que* $\lim_{x\to 0}\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi x^2}{2}=0$*.*

(c) Pelo limite trigonométrico fundamental, como em (a), podemos reescrever $\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos(x)}{\sin^2(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos(x)}{(\sin(2x))^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos(x)}{(2x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos(x)}{4x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{4}\right)\frac{1-\cos(x)}{x^2}$*. Agora, lembrando o limite trigonométrico* $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$*, temos que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos(x)}{\sin^2(2x)}=0.\frac{1}{2}=0.$$

(d) Pelo limite trigonométrico fundamental, como em (a), podemos reescrever $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin(x)}{x^2-\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x}+\frac{\sin x}{x}}{\frac{x^2}{x}-\frac{\sin x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x-1}=\frac{2}{0-1}=\frac{2}{-1}=-2$*.*

Exercício 12 (a) *Vamos determinar uma variável* $x = \sqrt{2\theta}$*, quando* $\theta \to 0$*,* $x \to 0$*, assim podemos reescrever o limite como* $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin(\sqrt{2\theta})}{\sqrt{2\theta}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$*, que é o limite trigonométrico fundamental, portanto* $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin(\sqrt{2\theta})}{\sqrt{2\theta}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

(b) *Como o item (b) do exercício 7, sabemos que* $\sin(y)$ *é limitada entre* $[-1, 1]$*, e que, quando* $y \to \infty$*, seus valores poderão ser qualquer um que esteja dentro desse intervalo, o que graficamente pode ser observado que não converge a nenhum valor real e, portanto, esse limite não existe.*

(c) *Pelo limite trigonométrico fundamental, como no exercício 11 item (a), podemos reescrever* $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x+\sin(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{2x} + \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$*. Observar que a segunda igualdade pode ser escrita como soma de limites pois cada um dos limites existe.*

(d) *Pelo limite trigonométrico fundamental, como no exercício 11, podemos reescrever* $\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos(\theta)}{\sin(2\theta)} = \lim_{\theta\to 0} \frac{2\theta}{\sin 2\theta}.\frac{1-\cos(\theta)}{2\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos(\theta)}{2\theta}$*. Agora, pelo limite trigonométrico usado no item (c) do exercício 11, o limite se reescreve como* $\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos(\theta)}{\sin(2\theta)} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\theta}{2}.\frac{1-\cos(\theta)}{\theta^2} = 0.\frac{1}{2} = 0$.

(e) *Pelo* $\lim_{\theta\to 0} \cos(\theta) = 1$ *temos que* $\lim_{\theta\to 0} \theta\cos(\theta) = \lim_{\theta\to 0} \theta = 0$.

Exercício 13 (a) *Denotemos* $f(x) = x^2$*. Devemos provar que*

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0; x \in \mathrm{Dom} f, 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x^2-4| < \epsilon.$$

Seja $\epsilon > 0$ *arbitrário. Temos que* $|x^2-4| = |(x-2)^2 + 4(x-2)|$*. Logo, se escolhemos* $\delta = \sqrt{\epsilon+4} - 2 > 0$*, e supondo que* $x \in \mathbb{R} = \mathrm{Dom} f, 0 < |x-2| < \delta$*, obtemos pela desigualdade triangular que*

$$|x^2-4| < \delta^2 + 4\delta = (\delta+2)^2 - 4 = \epsilon.$$

Assim, temos provado que

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta = \sqrt{\epsilon+4} - 2 > 0; x \in \mathrm{Dom} f = \mathbb{R}, 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x^2-4| < \epsilon.$$

Isto significa que $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

(b) *Denotemos* $f(x) = 4x+1$*. Devemos provar que*

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0; x \in \mathrm{Dom} f, 0 < |x-(-2)| < \delta \Rightarrow |4x+1-(-7)| < \epsilon.$$

Seja $\epsilon > 0$ *arbitrário. Temos que* $|4x+1+7| = |4(x+2)|$*. Logo, se escolhemos* $\delta = \frac{\epsilon}{4} > 0$*, e supondo que* $x \in \mathbb{R} = \mathrm{Dom} f, 0 < |x+2| < \delta$*, obtemos que*

$$|4x+1+7| < 4\delta = \epsilon.$$

Assim, temos provado que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \frac{\epsilon}{4} > 0; x \in \mathrm{Dom} f = \mathbb{R}, 0 < |x - (-2)| < \delta \Rightarrow |4x + 1 - (-7)| < \epsilon.$$

Isto significa que $\lim_{x \to -2}(4x + 1) = -7$.

Exercício 14 *Para que uma função seja contínua em p, o* $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.

(a) *Temos que* $p = 1$ *e que* $f(x) = -3x$, *portanto* $f(1) = -3$. *Agora, provemos que* $\lim_{x \to 1} -3x = -3$. *Seja* $\epsilon > 0$ *arbitrário. Temos que* $|-3x+3| = |-3(x-1)| = 3|x-1|$. *Logo, se escolhemos* $\delta = \frac{\epsilon}{3} > 0$, *e supondo que* $x \in \mathrm{Dom} f, 0 < |x - 1| < \delta$, *obtemos que*

$$|-3x + 3| < 3\left(\frac{\epsilon}{3}\right) = \epsilon.$$

Assim, temos provado que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \frac{\epsilon}{3} > 0; x \in \mathrm{Dom} f, 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |-3x - (-3)| < \epsilon.$$

Isto significa que $\lim_{x \to 1}(-3x) = -3 = f(1)$. *Portanto, f é contínua em* $p = 1$.

(b) *Temos que* $p = 4$ *e que* $f(x) = \sqrt{x}$, *portanto* $f(4) = 2$. *Agora, provemos que* $\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$. *Seja* $\epsilon > 0$ *arbitrário. Temos que* $|\sqrt{x} - 2| = \frac{|x-4|}{|\sqrt{x}+2|}$. *Observemos que para* $\delta = 1$, *se* $0 < |x - 4| < \delta = 1$, *então* $3 < x < 5$ *com* $x \neq 4$ *e assim* $\frac{1}{\sqrt{5}+2} < \frac{1}{\sqrt{x}+2} < \frac{1}{\sqrt{3}+2}$, *com* $x \neq 4$. *Então* $|\sqrt{x} - 2| = \frac{|x-4|}{|\sqrt{x}+2|} < \frac{|x-4|}{\sqrt{3}+2}$ *se* $0 < |x-4| < \delta = 1$. *Assim, escolhendo* $\delta = \min\{1, (\sqrt{3} + 2)\epsilon\}$ *e supondo que* $x \in \mathrm{Dom} f, 0 < |x - 4| < \delta$, *obtemos que*

$$|\sqrt{x} - 2| < \frac{(\sqrt{3} + 2)\epsilon}{\sqrt{3} + 2} = \epsilon.$$

Assim, temos provado que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \min\{1, (\sqrt{3} + 2)\epsilon\}; x \in \mathrm{Dom} f, 0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - 2| < \epsilon.$$

Isto significa que $\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2 = f(4)$. *Portanto, f é contínua em* $p = 4$.

Exercício 15 a) *Colocando z em evidencia no numerador, teremos*

$$\lim_{z \to 0} \frac{z^2 + 2z}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{z(z + 2)}{z} = \lim_{z \to 0} z + 2 = 2$$

b) *Note que* $x = 2$ *é raiz do polinômio* $2x^2 - 6x + 4$. *De fato,*

$$2(2)^2 - 6 \cdot 2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0.$$

Portanto, é possível realizar a seguinte fatoração

$$2x^2 - 6x + 4 = (2 - x) \cdot P(x).$$

Aplicando o algoritmo de divisão de polinômios, temos que $p(x) = -2x + 2$. *Portanto,* $2x^2 - 6x + 4 = (2 - x)(2 - 2x)$. *Logo,*

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 6x + 4}{2 - x} = \lim_{x \to 2} \frac{(2 - x)(2 - 2x)}{2 - x} = \lim_{x \to 2} 2 - 2x = 2 - 4 = 2$$

c) *Note que* $t = 1$ *é raiz do polinômio* $t^3 - 1$. *De fato,*

$$1^3 - 1 = 0.$$

Portanto, é possível realizar a seguinte fatoração

$$t^3 - 1 = (t - 1) \cdot P(x).$$

Analogamente ao item b), podemos utilizar algoritmo de divisão de polinômios e calcular $p(x)$. *Assim, obtemos a seguinte fatoração* $t^3 - 1 = (t-1)(t^2+t+1)$. *Logo,*

$$\lim_{t\to 1} \frac{t^3 - 1}{t - 1} = \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)(t^2+t-1)}{t-1} = \lim_{t\to 1} t^2 + t - 1 = 1 + 1 - 1 = 2$$

Exercício 16 a) *Multiplicando* $\frac{\text{sen}(6x)}{2x}$ *por* $\frac{3}{3}$, *teremos*

$$\frac{\text{sen}(6x)}{2x} = 3\frac{\text{sen}(6x)}{6x}.$$

Realizando a seguinte transformação de variáveis, $y = 6x$, *teremos*

$$3\frac{\text{sen}(6x)}{6x} = 3\frac{\text{sen}(y)}{y}.$$

Note que, quando $x \to 0$, $y \to 0$, *logo,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(6x)}{2x} = \lim_{y\to 0} 3\frac{\text{sen}(y)}{y}.$$

Como $\lim_{y\to 0} 3 = 3$ *e* $\lim_{y\to 0} \frac{\text{sen}(y)}{y} = 1$, *temos que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(6x)}{2x} = \lim_{y\to 0} 3\frac{\text{sen}(y)}{y} = \lim_{y\to 0} 3 \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\text{sen}(y)}{y} = 3 \cdot 1 = 3$$

b) *Multiplicando* $\frac{\text{sen}(5x)}{\text{sen}(9x)}$ *por* $\frac{9\cdot 5\cdot x}{9\cdot 5\cdot x}$, *teremos*

$$\frac{5}{9} \cdot \frac{\text{sen}(5x)}{5x} \cdot \frac{9x}{\text{sen}(9x)}.$$

Analogamente ao item a), teremos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(5x)}{\text{sen}(9x)} = \lim_{x\to 0} \frac{5}{9} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(5x)}{5x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{9x}{\text{sen}(9x)} = \frac{5}{9}$$

ginitemize

c) *Multiplicando* $\frac{\cos(x)-1}{x}$ *por* $\frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1}$, *teremos*

$$\frac{\cos(x) - 1}{x} \cdot \frac{\cos(x) + 1}{\cos(x) + 1} = \frac{\cos^2(x) - 1}{x(\cos(x) + 1)} = \frac{\text{sen}(x)}{x} \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x) + 1}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 1 \cdot 0 = 0$$

Exercício 17 *a) Multiplicando* $\frac{f(3x)}{x}$ *por* $\frac{3}{3}$*, teremos*

$$\frac{f(3x)}{x} = 3\frac{f(3x)}{3x},$$

portanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)}{x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)}{3x} = 3$$

b) Multiplicando $\frac{f(x^2)}{x}$ *por* $\frac{x}{x}$*, teremos*

$$\frac{f(x^2)}{x} = x\frac{f(x^2)}{x^2},$$

portanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} x \lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{x} = 0\cdot 1 = 0$$

c) Multiplicando $\frac{f(x^2-1)}{x-1}$ *por* $\frac{x+1}{x+1}$*, teremos*

$$\frac{f(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 0}(x+1)\frac{f(x^2-1)}{x^2-1},$$

portanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2-1)}{x-1} = (x+1)\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2-1)}{x^2-1} = 1\cdot 1 = 1$$

Exercício 18 *a) Como*

$$\frac{\tan(x)}{x} = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\frac{1}{x},$$

teremos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x)}{x}\frac{1}{\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x)}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)} = 1\cdot 1 = 1.$$

b) Como

$$\frac{x}{\text{sen}(x)} = \frac{1}{\frac{\text{sen}(x)}{x}},$$

teremos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\text{sen}(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x)}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

c) Realizando a transformação de variáveis, $y = x - \pi$*, teremos*

$$\frac{\text{sen}(x)}{x-\pi} = \frac{\text{sen}(y+\pi)}{y} = -\frac{\text{sen}(y)}{y}.$$

Note que, quando $x \to \pi$*,* $y \to 0$*, portanto,*

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\text{sen}(x)}{x-\pi} = \lim_{y\to 0} -\frac{\text{sen}(y)}{y} = -1.$$

Exercício 19 *a) Como*

$$\frac{\tan(2x)}{x} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\frac{2}{2x},$$

teremos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}\frac{2}{\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}\lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos(x)} = 1\cdot 2 = 2.$$

b) Como

$$\frac{7x}{6\operatorname{sen}(x)} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}},$$

teremos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x}{6\operatorname{sen}(x)} = \frac{\frac{7}{6}}{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}} = \frac{\frac{7}{6}}{1} = \frac{7}{6}.$$

c) Realizando a transformação de variáveis, $y = x - \frac{\pi}{2}$, *teremos*

$$\frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}} = \frac{\cos(y+\frac{\pi}{2})}{y} = -\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}.$$

Note que, quando $x \to \frac{\pi}{2}$, $y \to 0$, *portanto,*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{y\to 0} -\frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = -1.$$

d) Como $\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$, *teremos*

$$\frac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{\tan(x)-1} = \frac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}-1} = \frac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{\frac{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{\cos(x)}} = -\cos(x).$$

Portanto,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{\tan(x)-1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} -\cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

e) Como $\tan(\pi x) = \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\cos(\pi x)}$, *teremos*

$$\frac{\tan \pi x}{x-2} = \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{(x-2)\cos(\pi x)}$$

Note que, $\lim_{x\to 2}\frac{1}{\cos(\pi x)} = 1$. *Vamos agora, calcular* $\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{(x-2)}$. *Realizando a transformação de variáveis,* $y = x-2$, *teremos*

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{(x-2)} = \frac{\operatorname{sen}(\pi y - 2\pi)}{(y)} = \frac{\operatorname{sen}(\pi y)}{(y)}.$$

Note que, quando $x \to 2$, $y \to 0$. *Multiplicando por* $\frac{\pi}{\pi}$, *teremos*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{(x-2)} = \lim_{y\to 0}\pi\frac{\operatorname{sen}(\pi y)}{\pi y} = \pi.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 2}\frac{\tan \pi x}{x-2} = 1\cdot\pi = \pi.$$

f) Note que,

$$\frac{\tan(x-p)}{x^2-p^2} = \frac{\operatorname{sen}(x-p)}{\cos(x-p)}\frac{1}{(x-p)(x+p)} = \frac{\operatorname{sen}(x-p)}{x-p}\frac{1}{\cos(x-p)(x+p)}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to p}\frac{\tan(x-p)}{x^2-p^2} = \lim x\to p\frac{\operatorname{sen}(x-p)}{x-p}\frac{1}{\cos(x-p)(x+p)}.$$

Realizando a mudança de variável $y = x-p$, *teremos*

$$\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos(y)}(y+2p) = \frac{1}{2p}$$

g) Realizando a mudança de variável $h = x-p$, *teremos*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to p}\frac{\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(p)}{x-p} &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(p+h)-\operatorname{sen}(p)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(p)\cos(h)+\cos(p)\operatorname{sen}(h)-\operatorname{sen}(p)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\cos(p) + \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(p)}{h}(\cos(h)-1)\\ &= lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\cos(p) + \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(p)\operatorname{sen}^2(h)}{h(\cos(h)+1)}\\ &= lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\cos(p) + \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\frac{\operatorname{sen}(h)\operatorname{sen}(p)}{(\cos(h)+1)}\\ &= 1\cdot\cos(p)+0 = \cos(p).\end{aligned}$$

h) Pela mesma mudança de variável do item anterior, teremos

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}(p+h)}{\cos(p+h)}-\frac{\operatorname{sen}(p)}{\cos(p)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(p+h)\cos(p)-\cos(p+h)\operatorname{sen}(p)}{h\cos(p+h)\cos p}.$$

Como $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(b)\cos(a)$, *teremos*

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(p+h-p)}{h\cos(p+h)\cos(p)} &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\frac{1}{\cos(p+h)\cos(p)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(p+h)\cos(p)} = 1\cdot\frac{1}{\cos^2(p)} = \sec^2(x).\end{aligned}$$

i) Note que,

$$\frac{13^x - 8^x}{x} = \frac{13^x - 8^x + 1 - 1}{x} = \frac{(13^x - 1) - (8^x - 1)}{x}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{13^x - 8^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(13^x - 1)}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{(8^x - 1)}{x}$$

Utilizando o limite fundamental $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a)$, *temos que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{13^x - 8^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(13^x - 1)}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{(8^x - 1)}{x} = \ln(13) - \ln(8).$$

j) Vamos mostrar que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x^2} = 0.$$

Como $\frac{x-\operatorname{sen}(x)}{x^2}$ *é uma função impar, o resultado segue.*

Como estamos calculando um limite a direita do zero, temos que $x > 0$, *portanto,*

$$0 < \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x^2} < \frac{\tan(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2} = \tan(x)\frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{\tan(x)}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2,$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan(x)}{2} \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen}(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 0 \cdot 1 = 0.$$

k) Fazendo a mudança de variável $y = x^2 - x^4$, *temos que, quando* $x \to \infty$, $y \to -\infty$, *portanto*

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(x^2 - x^4) = \lim_{y\to-\infty} \operatorname{arctg}(y) = \frac{-\pi}{2}.$$

l) Note que,

$$\frac{x^{1/4} - 1}{x^{1/5} - 1} = \frac{x^{1/4} - 1}{x^{1/5} - 1} \frac{(1 + x^{1/5} + x^{2/5} + x^{3/5} + x^{4/5})}{(1 + x^{1/5} + x^{2/5} + x^{3/5} + x^{4/5})} = \frac{1 + x^{1/5} + x^{2/5} + x^{3/5} + x^{4/5}}{1 + x^{1/4} + x^{1/2} + x^{3/4}}$$

portanto,

$$\lim x \to 1 \frac{x^{1/4} - 1}{x^{1/5} - 1} = \lim x \to 1 \frac{1 + x^{1/5} + x^{2/5} + x^{3/5} + x^{4/5}}{1 + x^{1/4} + x^{1/2} + x^{3/4}} = \frac{1+1+1+1+1}{1+1+1+1} = \frac{5}{4}.$$

Exercício 20 *a) Primeiramente, note que*

$$\frac{2\sqrt{x} - 6}{x - 9} = 2\frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}.$$

Agora, multiplique a função a cima por $\frac{(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)}$, *teremos assim,*

$$2\frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = 2\frac{x - 9}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 9} \frac{2\sqrt{x} - 6}{x - 9} = \lim_{x\to 9} 2\frac{x - 9}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x\to 9} 2\frac{1}{(\sqrt{x} + 3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

b) Multiplique a função por $\frac{(5+\sqrt{4+3x})}{(5+\sqrt{4+3x})}$*, teremos,*

$$\begin{aligned}
\frac{(5-\sqrt{4+3x})}{(7-x)} &= \frac{(5-\sqrt{4+3x})}{(7-x)}\frac{(5+\sqrt{4+3x})}{(5+\sqrt{4+3x})} = \frac{(25-4-3x)}{(7-x)(5+\sqrt{4+3x})} \\
&= \frac{(21-3x)}{(7-x)(5+\sqrt{4+3x})} = \frac{3(7-x)}{(7-x)(5+\sqrt{4+3x})}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 7}\frac{(5+\sqrt{4+3x})}{(5+\sqrt{4+3x})} = \lim_{x\to 7}\frac{3(7-x)}{(7-x)(5+\sqrt{4+3x})} = \lim_{x\to 7}\frac{3}{(5+\sqrt{4+3x})} = \frac{3}{5+5} = \frac{3}{10}$$

c) Multiplique a função por $\frac{(1+\cos(x))}{(1+\cos(x))}$*, teremos,*

$$\frac{(1-\cos(x))}{x^2} = \frac{(1+\cos^2(x))}{x^2(1+\cos(x))} = \frac{\sin^2(x)}{x^2(1+\cos(x))}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{(1+\cos(x))} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos(x))} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Exercício 21 *a) Note que* $x = 1$ *é uma raiz comum dos polinomios* x^2-3x+2 *e* x^3-x^2+x-1*, portanto, podemos realizar a seguinte fatoração:*

$$\begin{aligned}
x^2-3x+2 &= (x-1)(x-2) \\
x^3-x^2+x-1 &= (x-1)(x^2+1).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-x^2+x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-2)}{(x^2+1)} = \frac{-1}{2}$$

b) Multiplicando a função por $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$ *teremos*

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{(x-a)}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}.$$

Logo,

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

c) Multiplicando a função por $\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}$ *teremos*

$$\frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{1-\cos(x)}\frac{(1+\cos(x))}{(1+\cos(x))} = \frac{x\,\mathrm{sen}(x)(1+\cos(x))}{\mathrm{sen}^2(x)} = \frac{x}{\mathrm{sen}(x)} + \frac{x\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}.$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{\mathrm{sen}(x)} + \frac{x\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)} = 1+1 = 2.$$

d) Como $|\mathrm{sen}(\frac{1}{x})| \leq 1$*, logo limitada, e* $\lim_{x\to 0} x = 0$*, teremos*

$$\lim_{x\to 0} x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x}) = 0.$$

e) Multiplicando a função por $\frac{(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5})}$*, teremos*

$$\frac{(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{2x+3}-\sqrt{5})}\frac{(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5})} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5})}{2x+3-5} = \frac{(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5})}{2(\sqrt{x}+1)}.$$

Logo,

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{2x+3}-\sqrt{5})} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5})}{2(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{2+3}+\sqrt{5}}{2(1+1)} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

f) Realizando a mudança de variável $y = x-\pi$*, teremos*

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\mathrm{sen}(x-\pi)}{x-\pi} = \lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{sen}(y)}{y} = 1$$

g) Como $(x^n - y^n) = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$*, teremos*

$$\lim_{x\to a}\frac{(x^n - a^n)}{(x-a)} = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)}{x-a}(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}) = na^n$$

h) A derivada é definida pelos seguintes limites:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}.$$

Desta forma, teremos que os items que representam uma derivada são:

b) $f(x) = \sqrt{x}$*;*

c) $f(x) = x^n$*.*

Exercício 22 *a)*

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^+2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x$$

b)

$$\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)+1-(3x+1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x+3h+1-3x-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}=\lim_{h\to 0}3=3$$

Exercício 23 *a)*

$$\lim_{x\to p}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{p}}{x-p}=\lim_{x\to p}\frac{p-x}{x\cdot p}\frac{1}{(x-p)}=\lim_{x\to p}\frac{-1}{x\cdot p}=\frac{-1}{p^2}$$

b)

$$\lim_{x\to p}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{p^2}}{x-p}=\lim_{x\to p}\frac{p^2-x^2}{x^2\cdot p^2}\frac{1}{(x-p)}=\lim_{x\to p}-\frac{(x-p)(x+p)}{x^2\cdot p^2}\frac{1}{(x-p)}=-\lim_{x\to p}\frac{(x+p)}{x^2\cdot p^2}=\frac{-2p}{p^4}=\frac{-2}{p^3}$$

c) Considere o limite

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p},$$

considere a seguinte mudança de variável $h=x-p$*. Note que, quando* $x\to p$*,* $h\to 0$*, portanto teremos que*

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}=\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h},$$

provando assim, a igualdade entre os limites. Vamos agora checar a igualdade dos limites a cima para a função $f(x)=x^2$*.*

$$\lim_{h\to 0}\frac{(p+h)^2-p^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{p^+2hp+h^2-p^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2hp+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}2p+h=2p.$$

Por outro lado,

$$\lim x\to p\frac{x^2-p^2}{x-p}=\lim x\to p\frac{(x-p)(x+p)}{x-p}=\lim x\to px+p=2p.$$

d) Estes limites, são a definição de derivada.

Exercício 24 *Se* $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=0$*, etão* $\forall\epsilon>0$*,* $\exists\delta>0$ *tal que*

$$|x-p|<\delta\implies\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|<\epsilon.$$

Como $g(x)\neq 0$,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=\frac{|f(x)|}{|g(x)|}<\epsilon\implies|f(x)|<\epsilon|g(x)|.$$

escolhendo ϵ_0 suficientemente pequeno, isto é, $\epsilon_0<1$, teremos que $\exists\delta_0>0$ tal que

$$|x-p|<\delta\implies|f(x)|<\epsilon|g(x)|<|g(x)|$$

Exercício 25 *a) Se* $\lim_{x\to p} f(x) = L$*, etão* $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ *tal que*

$$|x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Para a primeira implicação, basta definir $g(x) = f(x) - L$*. Como* $|g(x) - 0| = |f(x) - L|$*, dado um* $\epsilon > 0$*, o mesmo* δ *do limite anterior servira.*

Para a ultima implicação, basta definir $h(x) = -g(x)$ *e notar que* $|h(x) - 0| = |-g(x)| = |g(x)|$ *e o resultado seguira utilizando o mesmo* δ*.*

b) Se $\lim_{x\to p} f(x) = L$*, etão* $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ *tal que*

$$|x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Da desigualdade triangular, sabemos que

$$||f(x)| - |L|| \leq ||f(x) - L|| = |f(x) - L|\,.$$

Desta forma, dado $\epsilon > 0$*, o mesmo* δ *do limite anterior fara com que*

$$|x - p| < \delta \implies ||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L| < \epsilon.$$

O contra exemplo para a volta desta implicação é $\lim_{x\to 0} |3| = |-3| = 3$*, mas* $\lim_{x\to 0} 3 \neq -3$

c) A ida da implicação é exatamente o item b) com $L = 0$*, então nada precisa ser feito. Vamos, agora, demonstrar a volta. Se* $\lim_{x\to p} |f(x)| = 0$*, etão* $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ *tal que*

$$|x - p| < \delta \implies ||f(x)| - 0| < \epsilon.$$

Note que, $||f(x)| - 0| = |f(x)| = |f(x) - 0|$*, portanto,* $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ *tal que*

$$|x - p| < \delta \implies |f(x) - 0| < \epsilon.$$

Exercício 26 *Note que,*

$$|g(x)| \leq x^4 \implies -x^4 \leq g(x) \leq x^4 \implies -x^3 \leq \frac{g(x)}{x} \leq x^3.$$

Como,

$$\lim_{x\to 0} -x^3 = \lim_{x\to 0} x^3 = 0,$$

teremos que, pelo teorema do confronto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = 0.$$

Exercício 27 *Note que, fazendo o*

$$\lim_{x\to 0} 0 \leq \lim_{x\to 0} |ax^2 + bx + c| \leq \lim_{x\to 0} |x|^3$$

temos $0 \leq |c| \leq 0$, *pelo teorema do confronto, temos que* $|c| = 0 \Rightarrow c = 0$. *Temos, em seguida, que* $0 \leq |ax^2 + bx| \leq |x|^3$. *Dessa forma, podemos reescrever:*

$$0 \leq |x(ax + b)| \leq |x|^3 \Rightarrow 0 \leq |x||ax + b| \leq |x|^3$$

Como a desigualdade vale $\forall x \in \mathbb{R}$, *considere* $x \neq 0$. *Logo, podemos dividir os dois lados da igualdade por* $|x|$, *obtendo* $0 \leq |ax + b| \leq |x|^2$. *Dessa forma, pelo teorema do confronto em* $x \to 0$, *obtemos que* $b = 0$. *Da mesma forma, conseguimos provar que* $a = 0$. *Note que, mesmo considerando* $x \neq 0$, *ainda podemos fazer* $\lim\limits_{x\to 0}$ *por se tratar de um ponto de acumulação.*

Exercício 28 *(a)* $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \text{sen}(\frac{1}{x})$

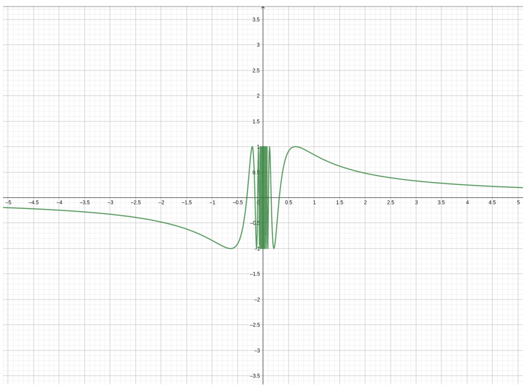


Figura 1: $sen(\frac{1}{x})$

(b) Como $-1 \leq \text{sen}(\frac{1}{x}) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *e como* $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, *então* $\lim\limits_{x\to 0} x\text{sen}(\frac{1}{x}) = 0$.

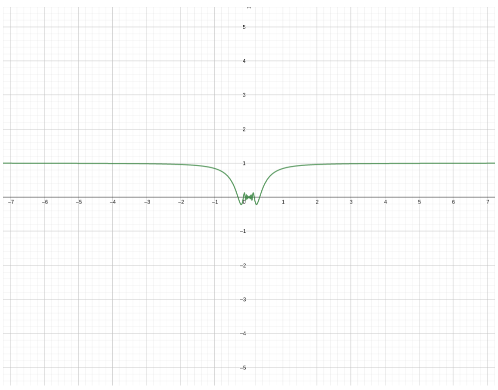


Figura 2: $xsen(\frac{1}{x})$

Exercício 29 *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in \mathbb{Q} \\ -1, & se\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases},$$

então $\nexists \lim\limits_{x \to p} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x \to p} |f(x)| = 1$.

Exercício 30 *Falsa, pois a igualdade dos limites laterais garante apenas a existência do limite* $\lim\limits_{x \to p} f(x)$*, mas não garante a existência de* $f(p)$ *e nem a igualdade* $\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$.

Tome como contraexemplo $f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ *e* $f(0) = 0$.

Exercício 31 *(a) Basta dividir numerador e denominador por* x^4 *e obtemos*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^4 - 2x + 1}{4x^4 + 3x + 2} = \frac{5}{4}.$$

(b) Basta dividir numerador e denominador por x^4 *e obtemos*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 + 1}{x^4 + 2x + 3} = 0.$$

(c) Basta colocar x^2 *em evidência no numerador e* x *em evidência no denominador assim obtemos* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{3x+2} = \dfrac{1}{3}$.

(d) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x - 1}}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3(1 + \frac{2x}{x^3} - \frac{1}{x^3})}}{\sqrt{x^2(1 + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2})}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = -1.$$

(e) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^2 + 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}(1 + x^{\frac{-1}{6}})}{x^2(1 + \frac{3}{x^2})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{1}{\sqrt[6]{x}})}{x^2(1 + \frac{3}{x^2})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\Big(\frac{1 + \frac{1}{\sqrt[6]{x}}}{1 + \frac{3}{x^2}}\Big) = 0.$$

(f) Racionalizando a expressão temos

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x+3} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+3})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}} = -\frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}}$$

e obtemos $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}} = -2 \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}} = 0.$

Exercício 32 *(a) Basta dividir numerador e denominador por* x *e obtemos*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5 - x}{3 + 2x} = -\frac{1}{2},$$

portanto $y = -\frac{1}{2}$ *é uma assíntota horizontal.*

(b) Escreva $2x - \sqrt{x^2+3} = x\big(2 - \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}\big)$*, então obtemos* $\lim\limits_{x \to +\infty} x\big(2 - \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x}\big) = +\infty$;

(c) *Racionalizando a expressão obtemos* $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-1}) = \dfrac{1}{2}$, *portanto* $y=\frac{1}{2}$ *é uma assíntota horizontal.*

(d) $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2x+1}{x^2+x} = +\infty$, *portanto* $x=-1$ *é uma assíntota vertical.*

(e) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x+1}{x^2+x} = +\infty$, *portanto* $x=0$ *é uma assíntota vertical.*

(f) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{3x-5}{x^2+3x-4} = -\infty$, *portanto* $x=1$ *é uma assíntota vertical.*

(g) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-4}{x^2-4x-4} = 0.$

(h) $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{3x^2-4}{1-x^2} = -\infty$, *portanto* $x=-1$ *é uma assíntota vertical.*

(i) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x^3-x^2} = -\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x^3-x^2} = \infty$, *portanto* $\nexists\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x^3-x^2}$ *e* $x=0$ *é uma assíntota vertical.*

(j) *Resolvido nos itens anteriores.*

Exercício 33 (a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2+\dfrac{1}{x}) = 2.$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}4x^4-3x+2 = \lim\limits_{x\to+\infty}4x^4 = +\infty.$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{5+\dfrac{2}{x}} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to+\infty}(5+\dfrac{2}{x})} = \sqrt[3]{5}$

Exercício 34 (a) *Basta dividir numerador e denominador por* x^6 *e obtemos*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^6-7x+3}{4x^6+x+5} = \frac{1}{2},$$

portanto $y=\frac{1}{2}$ *é uma assíntota horizontal.*

(b) *Basta dividir numerador e denominador por* x^5 *e obtemos*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7x^4+1}{x^5+6x+1} = 0,$$

portanto $y=0$ *é uma assíntota horizontal.*

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{6x+1} = \dfrac{1}{6}$, *portanto* $y=\frac{1}{6}$ *é uma assíntota horizontal.*

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+6x-1}}{\sqrt{3x^2+4x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, *portanto* $y=\frac{1}{\sqrt{3}}$ *é uma assíntota horizontal.*

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^2+7} = 0$, *portanto* $y=0$ *é uma assíntota horizontal.*

(f) *Racionalizando para resolver o limite obtemos,*

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+2}-\sqrt{x+5} = 0,$$

portanto $y=0$ *é uma assíntota horizontal.*

(g) *Resolvido nos itens anteriores.*

Exercício 35 *Dado* $\epsilon > 0$, *tome* $\delta = \max\{\epsilon^n, 1\}$, *então*

$$x > \delta \Rightarrow x > \epsilon^n \geq 1 \text{ ou } x > 1 \geq \epsilon^n,$$

logo $\sqrt[n]{x} > \epsilon \geq 1$ *ou* $\sqrt[n]{x} > 1 \geq \epsilon$.

Exercício 36 (a) *Racionalizando para resolver o limite obtemos,*

$$\lim_{x\to\infty} x - \sqrt[3]{2+3x^3} = -\infty.$$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sqrt{x+3}}{2x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{2x-1} + \dfrac{\sqrt{x+3}}{2x-1} = \dfrac{1}{2}.$

(c)

$$\frac{\sqrt{x^2+4}}{x} = \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{4}{x^2})}}{x} = \frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x}$$

Ambos são diferentes pois, na simplificação quando tratamos para $x \to +\infty$ *temos que* $|x| = x$ *e quando* $x \to -\infty$ *temos que* $|x| = -x$. *Assim,* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x} = 1$ *e* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x} = -1$.

Exercício 37 $\lim_{x\to0^+} \cos x = \cos(0) = 1$. *Como* $-1 \leq \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *e como* $\lim\limits_{x\to0^+} x = 0$, *então* $\lim\limits_{x\to0^+} x\operatorname{sen}(\dfrac{1}{x}) = 0$.

Nada podemos afirmar a respeito de $\lim_{x\to0^+} \frac{\cos(x)}{x \operatorname{sen}\frac{1}{x}}$ *com as informações acima.*

Exercício 38 (a) *Seja* $u = x-3$, *então* $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{|x-3|}{x-3} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{|u|}{u} = 1.$

(b) *Seja* $u = x-3$, *então* $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{|x-3|}{x-3} = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{|u|}{u} = -1.$

(c) *Não existe, basta olhar as alternativas (a) e (b).*

(d) $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{x^2-6x+9}{x-3} = \lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{(x-3)^2}{x-3} = \lim\limits_{x\to3^+} x-3 = 0.$

Exercício 39 *(a)* $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{2x^3+4x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(2+\frac{5}{x}\right)}{x^3\left(2+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2} = 0.$

(b) Por definição de limite no infinito, tomando $\epsilon = \frac{1}{2}$ *existe* $\delta > 0$, *com* $\delta > r$ *tal que para todo* $x > \delta > r_1$ *temos*

$$0 - \frac{1}{2} < \frac{2x+5}{2x^3+4x-1} < 0 + \frac{1}{2}.$$

Note que para $x > 0$ *temos* $2x+5 > 0$. *Vamos analisar o sinal do denominador* $2x^3+4x-1$ *que é uma função polinomial não decrescente.*

Para $x = 0$, *temos* $2x^3+4x-1 = -1 < 0$. *Por outro lado, para* $x = 1$ *temos* $2x^3+4x-1 = 5 > 0$. *Do teorema do valor intermediário, existe* $c \in (0,1)$ *tal que* $2c^3+4c-1 = 0$. *Basta tomar* $r = \max\{c, r_1\}$, *pois para todo* $x > r$ *temos*

$$0 < \frac{2x+5}{2x^3+4x-1} < \frac{1}{2}.$$

Observação: *As outras raízes do polinômio* $2x^3+4x-1$ *são complexas.*

Exercício 40 *(a)* $x - \sqrt{x^2+1} = x - \sqrt{x^2+1}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)$ *(Mult. pelo conjugado)*

$= \frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}} = 0$

(b) $x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

Sabe-se que:

$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x = e^a$

Portanto, como $\ln$ *é uma função contínua em seu domínio*

$\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \ln(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x)$
$= \ln(e^2) = 2.$

(c) Faça a mudança de variáveis $1-x = u$ *então se* $x \to 1$ *temos* $u \to 0$. *Logo,*

$$(1-x)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = u\mathrm{tg}\left(\frac{\pi(1-u)}{2}\right) = u \cdot \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi u}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi u}{2}\right)}.$$

Aplicando as identidades trigonométricas $\mathrm{sen}(a-b) = \mathrm{sen}(a)\cos(b) - \mathrm{sen}(b)\cos(a)$ *e* $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \mathrm{sen}(a)\mathrm{sen}(b)$ *obtemos,*

$$u \cdot \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{u\pi}{2}\right) - \mathrm{sen}\left(\frac{u\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{u\pi}{2}\right) + \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{u\pi}{2}\right)} = u \cdot \frac{\cos\left(\frac{u\pi}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{u\pi}{2}\right)}.$$

Perceba que $u \cdot \dfrac{\cos\left(\frac{u\pi}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{u\pi}{2}\right)} = \dfrac{u}{\mathrm{sen}\left(\frac{u\pi}{2}\right)} \cdot \cos\left(\dfrac{u\pi}{2}\right) = \left(\dfrac{\mathrm{sen}\left(\frac{u\pi}{2}\right)}{u}\right)^{-1} \cdot \cos\left(\dfrac{u\pi}{2}\right)$.

Multiplicando e dividindo por $\dfrac{\pi}{2}$, *conseguiremos aplicar o limite fundamental do seno, obtemos assim*

$\left(\dfrac{\mathrm{sen}\left(\frac{u\pi}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2}}{u \cdot \frac{\pi}{2}}\right)^{-1} \cdot \cos\left(\dfrac{u\pi}{2}\right)$. *Portanto,*

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \lim_{u\to 0}\left(\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{u\pi}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2}}{u \cdot \frac{\pi}{2}}\right)^{-1} \cdot \cos\left(\frac{u\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{\pi}.$$

(d) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}(x^2 - \sqrt{x^4+7}) \cdot \frac{x^2+\sqrt{x^4+7}}{x^2+\sqrt{x^4+7}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-7}{x^2\left(1+\sqrt{1+\frac{7}{x^4}}\right)} = 0.$

(e) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \mathrm{tg}\left(\frac{\pi x^4}{2x^4+3x+2}\right) = \lim_{x\to\infty} \mathrm{tg}\left(\frac{\pi x^4}{x^4(2+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4})}\right) = \lim_{x\to\infty} \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}}\right) = \infty.$

(f) Fazendo a mudança de variável $\dfrac{1}{x} = u$, *temos se* $x \to \infty$ *então* $u \to 0$. *Logo,*

$\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)^x = (1+2u+u^2)^{\frac{1}{u}} = (1+u)^{\frac{2}{u}}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^x = \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{2}{u}} = e^2.$$

(g) Primeiramente $x^2\ln\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right) = \ln\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)^{x^2}$. *Fazendo,* $\dfrac{3}{x^2} = u$ *vemos que se* $x \to \infty$ *então* $u \to 0$. *Logo,*

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{3}{x^2}\right)^{x^2} = \lim_{u\to 0}\ln(1+u)^{\frac{3}{u}} = \ln(e^3) = 3.$$

(h) *Lembre que* $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$. *Logo,*

$$\lim_{x\to\infty} \sec\left(\frac{\pi x^3 - 213}{x^3 + 10x + 1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi x^3 - 213}{x^3 + 10x + 1}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\cos\left(\frac{x^3(\pi + \frac{213}{x^3})}{x^3(1 + \frac{10}{x^2} + \frac{1}{x^2})}\right)} = \frac{1}{\cos(\pi)} = -1$$

Exercício 41 *(a.) Falso, pois* $\lim_{x\to 1} \dfrac{g(x)}{1-x^2} = \lim_{x\to 1} \dfrac{g(x)}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{-10}{2} = -5.$

(b.) Falso, $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)\frac{1-x^3}{1-x^3}}{g(x)\frac{1-x}{1-x}} = \lim_{x\to 1} \dfrac{\frac{f(x)(1-x)(1+x+x^2)}{(1-x^3)g(x)(1-x)}}{1-x} = \dfrac{6}{-10} \cdot 3 = \dfrac{-9}{5}.$

(c.) Falso, calculamos o $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(d.) Falso, note que fazendo a mudança de variável $u = x - 1$, *temos* $x \to 1$, *logo* $u \to 0$. *Dessa forma,* $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{1-x^3} = \lim_{u\to 0} \dfrac{f(u+1)}{1-(1+u)^3} = 6$. *Agora,*

$$\lim_{x\to 1} f(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{f(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)}{1-x^3}}{\dfrac{1}{1-x^3}} = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{f(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)}{1-x^3}}{\dfrac{1}{(x-1)(-1-x-x^2)}}.$$

Fazendo a mudança de variável descrita acima, obtemos

$$\lim_{u\to 0} \frac{\dfrac{f(u+1) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{u}\right)}{1-(u+1)^3}}{\dfrac{1}{u(-1-(u+1)-(u+1)^2)}} = \lim_{u\to 0} \frac{f(u+1)}{1-(u+1)^3} \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{u}\right)}{\frac{1}{u}} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{-1-(1+u)-(1+u)^2}} =$$

$$= (6) \cdot (1) \cdot (-3) = -18.$$

(e.) Verdadeiro.

Exercício 42 $a = -8$, $b = 5$, $c = 14$, $m = 2$, $n = 0$ *e* $p = -2$.

Exercício 43 *(a) Como* f *é limitada em uma vizinhança de* a, *então para pontos* x *próximos de* a *temos para algum* $M > 0$ *que* $|f(x)| \leq M$, *ou seja,* $-M \leq f(x) \leq M$. *Logo, para* x *próximo de* a *segue*

$$-Mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x),$$

e como $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, *obtemos pelo teorema da confronto que* $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

(b) *Seja* $a \in \mathbb{R}$. *Para* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $0 < |x-a| < \pi/2$ *segue que*

$$|\cos x - \cos a| = \left| -2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\right| \leq \left|2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \leq 2\frac{|x-a|}{2} = |x-a|,$$

ou seja,

$$-|x-a| \leq \cos x - \cos a \leq |x-a|.$$

Como $\lim\limits_{x\to a} \pm|x-a| = 0$, *temos pelo teorema do confronto que* $\lim\limits_{x\to a}\big(\cos x - \cos a\big) = 0$, *e portanto* $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$. *Logo, a função* cos *é contínua.*

Exercício 44 *Se* $f(x) = 1$ *e* $g(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, *então* $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$ *e não existe o limite* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Exercício 45 *O erro ocorre quando a indeterminação* $\infty \times 0 = 0$, *o que é um absurdo. (Estratégia de resolução: multiplicar pelo conjugado).*

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x} - x)\frac{(\sqrt{x^2+x}) + x}{(\sqrt{x^2+x}) + x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)} = \frac{1}{2}.$$

Exercício 46 *(a) Verdadeira. Temos* $f(x) > 0$ *pois* f *é positiva para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Além disso,* f *é limitada, logo* $f(x) \leq M$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$, $M > 0$ *Devemos encontrar* $\delta > 0$ *tal que* $f(x)g(x) > \epsilon$ *para todo* $x > \delta$ *e todo* $\epsilon > 0$. *Como* $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, *por definição segue que para todo* $M\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $x > \delta$ *temos* $g(x) > \epsilon$. *Desta forma,* $\dfrac{1}{f(x)} > \dfrac{1}{M}$. *Para todo* $x > \delta$ *temos*

$$g(x)f(x)\frac{1}{f(x)} > M\epsilon\frac{1}{M} = \epsilon.$$

(b) Verdadeira. De f *limitada temos* $|f(x)| \leq M$, *com* $M \geq 0$. *Em particular,* $-M \leq f(x) \leq M$. *Do fato,* $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, *segue que para* $\epsilon + M$, *existe* $\delta > 0$ *tal que para* $x > \delta$ *temos* $g(x) > \epsilon + M$. *Logo, para* $x > \delta$, *temos*

$$f(x) + g(x) > -M + \epsilon + M = \epsilon.$$

(c) Falso. Tome por exemplo $f(x) = c$, $c > 0$ *uma constante, para todo* $x \in \mathbb{R}$ *e* $g(x) = 1/x$ *se* $x \neq 0$ *(para* $x = 0$ *defina* $g(x) = 0$*). Então,* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} xc = \infty$. *Mas,* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} c - \dfrac{1}{x} = c$.

Exercício 47 *(a)* $f(x) = x$ *e* $g(x) = x^2$.

(b) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ *e* $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

(c) $f(x) = x^2$ *e* $g(x) = x$.

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$ *e* $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

Exercício 48 *(a)* $(-\infty, -1) \cup (-1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$.

(b) $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$.

(c) $(\frac{3}{2}, \infty)$.

(d) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

(e) $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

(f) $(6, 9]$.

Exercício 49 *(a)* $D(f) = [-1, \infty)$ *e* f *é descontínua em* $x = -1$.

(b) $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$, f *é contínua em todo seu domínio e* $x = -2$ *é uma assíntota vertical.*

Exercício 50 *Sejam* $a \in \operatorname{Dom} h$ *e* $\varepsilon > 0$. *Se* $x \leq 3$, *então* $\exists \delta_f$ *tal que* $a - \delta_f < x < a + \delta_f \Rightarrow f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon \Rightarrow h(a) - \varepsilon < h(x) < h(a) + \varepsilon$.

Agora, se $x > 3$, *então* $\exists \delta_g$ *tal que* $a - \delta_g < x < a + \delta_g \Rightarrow g(a) - \varepsilon < g(x) < g(a) + \varepsilon \Rightarrow h(a) - \varepsilon < h(x) < h(a) + \varepsilon$.

Tomando $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$, *então* $\forall x \in \mathcal{R}$, $a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow h(a) - \varepsilon < h(x) < h(a) + \varepsilon$. *Portanto,* h *é contínua em* $\mathbb{R}$.

Exercício 51 *Chamando por* $\varphi_1(x) = 3x$, $\varphi_2(x) = Ax + B$ *e* $\varphi_3(x) = -6x$, *sabemos que* f *será contínua em* $\mathbb{R}$ *quando*

$$\begin{cases} \varphi_1(2) = \varphi_2(2) \\ \varphi_2(5) = \varphi_3(5) \end{cases}.$$

Portanto,

$$\begin{cases} 2A + B = 6 \\ 5A + B = -30 \end{cases} \Rightarrow A = -12 \text{ e } B = 30.$$

Exercício 52 *(a)* *Considere* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definidas por*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad e \qquad g(x) = 1 - f(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Então, f *e* g *são descontínuas em* $x = 0$, *enquanto que* $f + g$ *é contínua em* $x = 0$.

(b) *Considere* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definidas por*

$$g(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \neq 0 \\ 1, & se\ x = 0 \end{cases} \qquad e \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \neq 0, x \neq 1 \\ 0, & se\ x = 0 \\ 0, & se\ x = 1 \end{cases}.$$

Então, g *é descontínua em* $x_0 = 0$*,* f *é descontínua em* $g(0) = 1$ *e* $f \circ g = 0$ *é contínua em* $\mathbb{R}$*.*

(c) *Considere* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definidas por* $f(x) = 0$*,* $x \in \mathbb{R}$*, e*

$$g(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \neq 0 \\ 1, & se\ x = 0 \end{cases}.$$

Temos g *descontínua em* $x_0 = 0$*,* f *contínua em* $g(0) = 1$ *e* $f \circ g = 0$*.*

Exercício 53 (a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2^-} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} &= \lim_{x \to 2^-} \frac{\frac{x^2}{2} - 2}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2^-} \frac{(\frac{x}{2} + 1)(x - 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2^-} \frac{x}{2} + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} = 1.$$

(c) *Não existe, pois os limites laterais são diferentes, conforme calculado nos itens acima.*

(d) *Não, pois não existe* $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$*.*

Exercício 54 (a) *Lembre-se que* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$ *e* $\cos(x)$ *é contínua. Assim,*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{x}{\operatorname{sen}(x) - 2x}\right) &= \lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - 2}\right) \\ &= \cos\left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - 2}\right) \\ &= \cos(-1). \end{aligned}$$

(b) *Observe que* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{3x} = 1$ *e* $\operatorname{sen}(x)$ *é contínua. Assim,*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-3x)}{x}\right) &= \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2})\cos(3x)+\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})\operatorname{sen}(3x)}{x}\right)\\
&= \operatorname{sen}\left(\lim_{x\to 0}\frac{3\cos(\frac{\pi}{2})\cos(3x)+3\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})\operatorname{sen}(3x)}{3x}\right)\\
&= \operatorname{sen}(3).
\end{aligned}$$

Exercício 55 (a) *Falso.*

Contra-exemplo: Defina $g(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \leq 4 \\ 1, & se\ x > 4 \end{cases}$.

Note primeiramente, que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = 4.$$

Assim, fazendo $y = f(x)$, *obtemos que*

$$\lim_{x\to 2} h(f(x)) = \lim_{y\to 4} h(y) = \lim_{y\to 4} g(y),$$

o qual não existe, pois g *é descontínua em* $x = 4$.

Por outro lado,

$$h(\lim_{x\to 2} f(x)) = h(4) = g(4) = 0.$$

(b) *Falso.*

Contra-exemplo: Defina $g(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \leq 2 \\ 1, & se\ x > 2 \end{cases}$.

Assim,

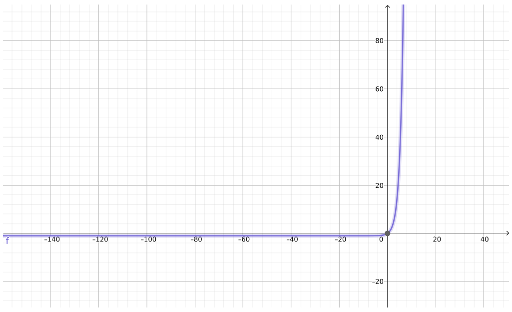
$$f(\lim_{y\to 2} h(y)) = f(\lim_{y\to 2} g(y)),$$

mas não existe $\lim_{y\to 2} g(y)$, *pois* g *é descontínua em* 2.

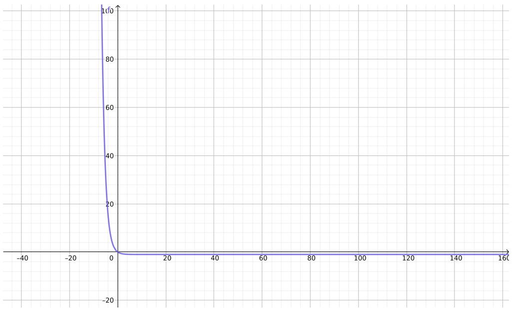
Por outro lado,

$$\lim_{y\to 2} f(h(y)) = \lim_{y\to 2} f(g(y)) = f(0) = 2.$$

Exercício 56 (a)



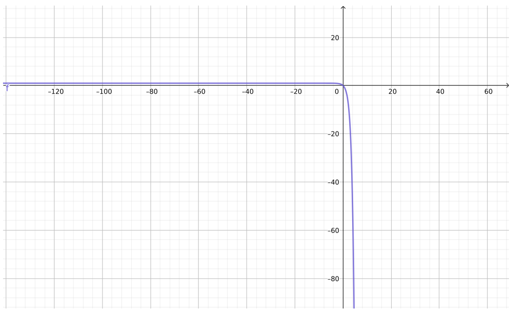
$y = 2^x - 1$



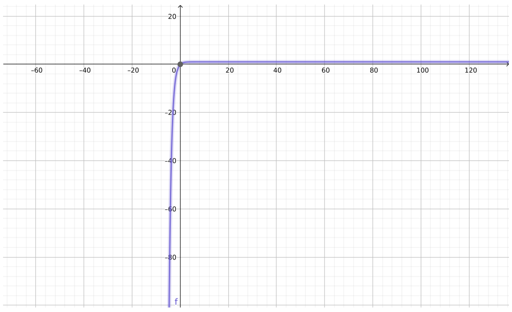
$y = 2^{-x} - 1$

(b) ∞.

(c)



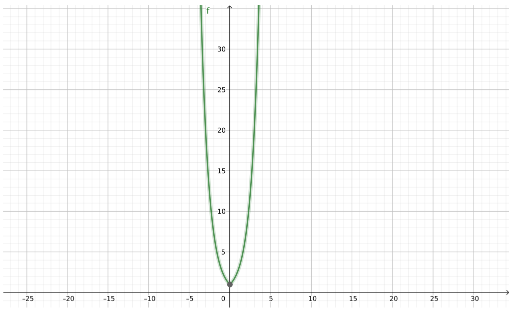
$y = 1 - e^x$



$y = 1 - e^{-x}$

(d) $-\infty$.

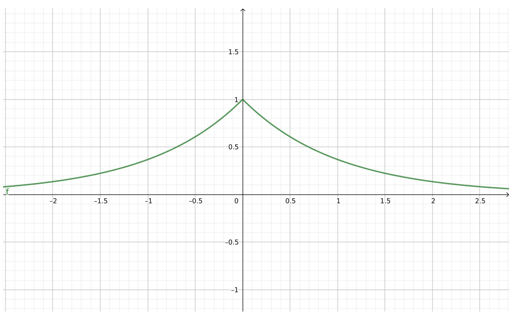
Exercício 57 (a)



$y = e^{|x|}$

$\lim_{x\to\infty} e^{|x|} = \infty$.
$\lim_{x\to-\infty} e^{|x|} = \infty$.
Não possui assíntotas.

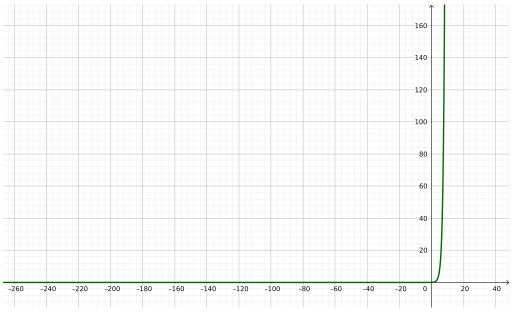
(b)



$y = e^{-|x|}$

$\lim_{x\to\infty} e^{-|x|} = 0$.
$\lim_{x\to-\infty} e^{-|x|} = 0$.
O eixo Ox *é uma assíntota horizontal.*

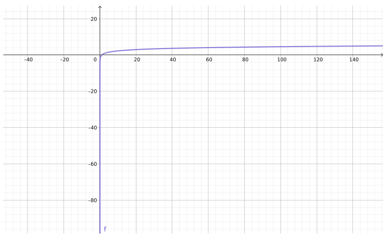
(c)



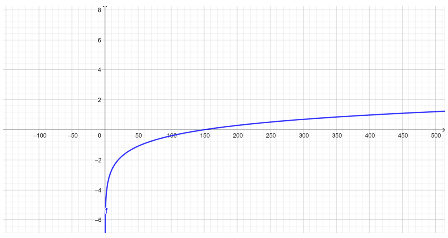
$y = e^{x-3}$

$\lim_{x\to\infty} e^{x-3} = \infty.$
$\lim_{x\to-\infty} e^{x-3} = 0.$
O eixo Ox *é uma assíntota horizontal.*

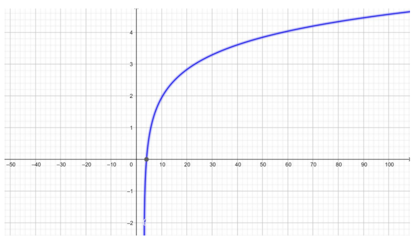
Exercício 58 *Seguem os gráficos para ajudar nas análise dos limites*



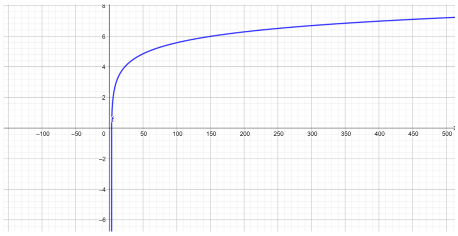
$y = \ln(x)$



$y = \ln(x) - 5$



$y = \ln(x - 3)$



$y = 1 + \ln(x-3)$

(a) $-\infty$.
(b) ∞.
(c) ∞.
(d) ∞.
(e) $-\infty$.
(f) $-\infty$.

Exercício 59 (a) *Como* $e^x \neq -2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *então* $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
(b) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
(c) *Note que*

$$e^{2x} = 1 \Leftrightarrow \ln(e^{2x}) = \ln(1) \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Assim, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
(d) *Note que*

$$e^{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow \ln(e^{1-x^2}) = \ln(1) \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}.$$

Assim, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.
(e) *Como* $e^{\cos(x)} \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *então* $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Exercício 60 (a)

$$\ln(sen(\theta)) - \ln\left(\frac{sen(\theta)}{5}\right) = \ln(sen(\theta)) - [\ln(sen(\theta)) - \ln(5)] = \ln(5).$$

(b)

$$\begin{aligned} \ln(3x^2 - 9x) + \ln\left(\frac{1}{3x}\right) &= \ln((3x)(x-3)) + [\ln(1) - \ln(3x)] \\ &= \ln(3x) + \ln(x-3) - \ln(3x) \\ &= \ln(x-3). \end{aligned}$$

(c)

$$\ln(\sec(\theta)) + \ln(\cos(\theta)) = \ln[(\sec(\theta))(\cos(\theta))] = \ln(1) = 0.$$

(d)

$$\begin{aligned} \ln(8x+4) - 2\ln(2) &= \ln(8x+4) - \ln(2^2) \\ &= \ln\left(\frac{8x+4}{4}\right) \\ &= \ln(2x+1). \end{aligned}$$

Exercício 61 (a)
$$e^{2k} = 4 \Leftrightarrow \ln(e^{2k}) = \ln(4) \Leftrightarrow 2k = \ln(4)$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{2}\ln(4) \Leftrightarrow k = \ln(4^{\frac{1}{2}}) \Leftrightarrow k = \ln(2).$$

(b)
$$100e^{10k} = 200 \Leftrightarrow e^{10k} = 2 \Leftrightarrow 10k = \ln(2) \Leftrightarrow k = \ln(2^{\frac{1}{10}}).$$

(c)
$$e^{\frac{k}{1000}} = a \Leftrightarrow \frac{k}{1000} = \ln(a) \Leftrightarrow k = 1000\ln(a) \Leftrightarrow k = \ln(a^{1000}).$$

(d)
$$e^{5k} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 5k = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow k = \frac{1}{5}[-\ln(4)] \Leftrightarrow k = -\ln(4^{\frac{1}{5}}).$$

(e)
$$80e^{k} = 1 \Leftrightarrow e^{k} = \frac{1}{80} \Leftrightarrow k = \ln\left(\frac{1}{80}\right) \Leftrightarrow k = -\ln(80).$$

(f)
$$e^{\ln(0,8)k} = 0,8 \Leftrightarrow \ln(0,8)k = \ln(0,8) \Leftrightarrow k = 1.$$

Exercício 62 (a)
$$e^{kt} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow kt = -\ln(10) \Leftrightarrow t = -\ln(10^{\frac{1}{k}}).$$

(b)
$$e^{-\frac{1}{100}t} = 1000 \Leftrightarrow -\frac{1}{100}t = \ln(1000) \Leftrightarrow t = -\ln(1000^{100}).$$

Exercício 63 *Não, pois* $\frac{\ln(4)}{4} = \frac{2\ln(2)}{4} = \frac{\ln(2)}{2}$.

Exercício 64 (a) Teorema do Anulamento: *Se* $y = f(x)$ *é uma função limitada em torno de um ponto* p *e* $\lim_{x\to p} g(x) = 0$*, então* $\lim_{x\to p}(f(x)g(x)) = 0$.

(b) Teorema do Valor Intermediário: *Seja* f *uma função contínua no intervalo fechado* $[a, b]$*. Se* y_0 *é um valor entre* $f(a)$ *e* $f(b)$*, então existe pelo menos um* $x_0 \in [a, b]$ *tal que* $f(x_0) = y_0$.

(c) Teorema de Weierstrass: *Seja* f *uma função contínua em* $[a, b]$*. Então, existem números* $x_m, x_M \in [a, b]$*, tais que,* $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$*, para todo* $x \in [a, b]$.

Exercício 65 *(a) Definamos uma função* f *como* $f(x) = x^5 - 4x + 1$*. Notemos que* f *é uma função contínua em todo* $\mathbb{R}$ *e assim em particular é contínua no intervalo* $[1, 2]$*. Além disso, observamos que* $f(1) = -2, f(2) = 25$*, logo* $f(1) < 7.21 < f(2)$*. Portanto, podemos aplicar o Teorema do Valor Intermediário, concluindo assim que existe um número real* $x_0 \in]1, 2[$ *tal que* $f(x_0) = 7,21$.

(b) *Seja* $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ *definida por* $h(x) = f(x) - g(x)$. *Notemos que* h *é contínua pois* f *e* g *o são. Também, tem-se por hipótese que* $h(a) < 0$ *e* $h(b) > 0$. *Então, pelo Teorema do Valor Intermediário, teremos que existe* $c \in]a, b[$ *tal que* $h(c) = 0$, *isto é,* $f(c) = g(c)$.

Exercício 66 (a) *Notemos que* f *é uma função contínua em todo* $\mathbb{R}$ *e assim em particular é contínua no intervalo* $[6, 7]$. *Além disso, observamos que* $f(6) = 69, f(7) = 138$, *logo* $f(6) < 100 < f(7)$. *Portanto, segue-se do Teorema do Valor Intermediário que existe* $x_0 \in]6, 7[$ *tal que* $f(x_0) = 100$.

(b) *Seja* f *definida como* $f(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x + 1$. *Observamos que* $f(0) = 1, f(1) = -4$ *e assim* $f(1) < 0 < f(0)$. *Além disso, a função* f *é contínua em* $[0, 1]$, *por ser uma função polinomial. Portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe* $c \in]0, 1[$ *tal que f(c)=0. Isto último significa que a equação* $x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x + 1 = 0$ *possui, pelo menos, uma raiz no intervalo* $]0, 1[$.

Exercício 67 *Esboce o gráfico da função* f *e observe que* f *tem máximo igual a* $f(0) = 4$ *mas não possui mínimo em* $[-2, 7]$. *Devemos notar que isto não contradiz o Teorema de Weierstrass devido a que a função* f *não é contínua em* $x = 4$ *e para verificar isto basta concluir que os limites laterais não coincidem pois*

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = -4$$

e

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = 2.$$

Exercício 68 *Defina* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *por* $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{1 + x^4}$. *Observe que* f *é contínua em* $\mathbb{R}$ *e em particular, contínua em* $[0, 1]$. *Além disso,* $f(0) = -1$ *e* $f(1) = \dfrac{1}{2}$, *então* $f(0) < 0 < f(1)$. *Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, tem-se que existe* $c \in]0, 1[$ *tal que* $f(c) = 0$ *e conclui-se da mesma forma que no exibido no exercício 70 (b).*

Exercício 69 (a) *Devido a que a função* f *é contínua em* $[-1, 1]$, *temos pelo Teorema de Weierstrass que existem* $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ *tais que* $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, *para todo* $x \in [-1, 1]$. *Isto quer dizer que* $f(x_1)$ *e* $f(x_2)$ *são os valores mínimo e máximo de* f, *respectivamente. Verifiquemos que* $f(x_2) = f(1) = 1$. *Com efeito, para qualquer* $x \in [-1, 1]$, *tem-se que* $x^2 + x \leq 1 + x^2$ *e dado que* $1 + x^2 > 0$, *obtemos que*

$$\frac{x^2 + x}{1 + x^2} \leq 1,$$

para todo $x \in [-1, 1]$. *Portanto,* $f(x) \leq 1 = f(1)$, *para todo* $x \in [-1, 1]$ *e assim* $f(x_2) = f(1) = 1$ *é o valor máximo de* f, *pela definição do máximo de uma função.*

(b) *Tínhamos pela parte (a) que* $f(x_1)$ *é o valor mínimo de* f*, com* $x_1 \in [-1, 1]$ *como consequência do Teorema de Weierstrass. Por outro lado, observamos que*

$$f(x) = \frac{x(x+1)}{1+x^2} \geq 0,$$

para todo $x \in [0, 1]$ *e*

$$f(x) = \frac{x(x+1)}{1+x^2} \leq 0,$$

para todo $x \in [-1, 0]$.

Portanto, deduzimos que $x_1 \in]-1, 0[$*, pois* $f(x_1)$ *é o valor mínimo de* f*,* $f(-1) = f(0) = 0$ *e* $f(x) < 0$ *para todo* $x \in]-1, 0[$*. Assim temos provado que existe* $x_1 \in]-1, 0[$ *tal que* $f(x_1)$ *é o valor mínimo de* f*.*

Exercício 70 *Lembremos a definição de um intervalo.* I *é um intervalo se dados* $a, b \in I$*, para qualquer* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $a \leq \lambda \leq b$ *então* $\lambda \in I$*.*

Agora, denotemos por $J = f(I)$ *a imagem de* f*, onde* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é contínua por hipótese. Devemos provar, por definição de intervalo, que dados* $y_1, y_2 \in J$*, e para qualquer* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $y_1 \leq \lambda \leq y_2$*, então* $\lambda \in J$*.*

Com efeito, é importante observar que se $I = [a, a] = \{a\}$*, logo temos provado automaticamente o requerido. Então, provemos supondo que* I *não é da forma* $I = [a, a]$*. Dados* $y_1, y_2 \in J$ *e suponha que para qualquer* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tem-se* $y_1 \leq \lambda \leq y_2$*. Como* I *não é da forma* $[a, a]$*, então segue-se que* $y_1 < y_2$*. Por outro lado, como* $y_1, y_2 \in J = f(I)$*, tem-se por definição de imagem de uma função que existem* $x_1, x_2 \in I$ *tais que* $f(x_1) = y_1$ *e* $f(x_2) = y_2$*. Agora, definamos a função* $g(x) := f(x) - \lambda$*. Note que se* λ *for igual á* $f(x_1)$ *ou* $f(x_2)$*, termina a prova. Assim, podemos supor que* $y_1 < \lambda < y_2$*. Observamos que* g *é contínua em* I *e que*

$$g(x_1) = f(x_1) - \lambda = y_1 - \lambda < 0$$

e

$$g(x_2) = f(x_2) - \lambda = y_2 - \lambda > 0.$$

Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in]x_1, x_2[$ *tal que* $g(c) = 0$*. Além disso, como* I *é intervalo e* $x_1, x_2 \in I$*, logo* $c \in I$ *e assim*

$$\begin{aligned} 0 &= g(c) \\ &= f(c) - \lambda \end{aligned}$$

o que significa que $\lambda \in J$*.*

Exercício 71 *Dados* $s, t \in [a, b]$ *com* $s < t$ *devemos provar que* $f(s) < f(t)$*. Por absurdo, suponha que* $f(s) \geq f(t)$*. Logo, por hipótese, devemos ter que* $f(s) > f(t)$*, pois* $s < t$*. Agora, iremos provar que* $f(a) \leq f(s) < f(b)$ *que será de muita utilidade para a prova. Com efeito, se não fosse assim, teríamos que* $f(s) < f(a)$ *ou* $f(s) \geq f(b)$*. Vamos analisar esses casos:*

<u>Caso 1</u>: Se $f(s) < f(a)$*, logo segue-se da hipótese que* $f(s) < f(a) < f(b)$*. Então, como* f

é contínua em $[a, b]$, *tem-se pelo Teorema de Valor Intermediário que existe* $c \in]s, b[$ *tal que* $f(c) = f(a)$. *Mas por hipótese, o último vai implicar que* $c = a$, *e isto em particular implica que* $s < a$, *o que é uma contradição pois* $a \leq s$.
<u>Caso 2</u>: Se $f(s) \geq f(b)$, *logo por hipótese vamos ter que* $f(s) \geq f(b) > f(a)$. *Observe que se desprendem dois subcasos:*
- Subcaso 1: Se $f(s) = f(b) > f(a)$, *logo por hipótese teríamos que* $s = b$ *o que é uma contradição pois* $s < t \leq b$.
- Subcaso 2: Se $f(s) > f(b) > f(a)$ *e pela continuidade de* f *em* $[a, b]$, *segue-se do Teorema do Valor Intermediário que existe* $d \in]a, s[$ *tal que* $f(d) = f(b)$. *Mas por hipótese isto vai implicar que* $d = b$ *o que é uma contradição pois* $s < b$.
Assim, temos provado que $f(a) \leq f(s) < f(b)$. *Usando isto vamos ter que*

$$f(t) < f(s) < f(b),$$

e pelo Teorema do Valor Intermediário temos que existe $e \in]t, b[$ *tal que* $f(e) = f(s)$. *Isto por hipótese implica que* $e = s$ *o qual é um absurdo pois* $e < b$. *Portanto, concluímos que dados* $s, t \in [a, b]$, $s < t$ *então* $f(s) < f(t)$, *isto é,* f *é estritamente crescente.*

Exercício 72 *(a)* $Dom(f) = (-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$.

(b) Observe que composição, soma e produto de funções contínuas é contínua.

(c) Notemos que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(1 - 2\sqrt{7}) < 0$ *e* $f(2) = 16 - \sqrt{10} > 0$. *Temos também que* f *é contínua em* $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. *Então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe* $c \in \left]\frac{1}{2}, 2\right[$ *tal que* $f(c) = 0$. *Além disso, notamos que* $x = 1$ *é também uma raiz de* f *em* $[1, +\infty[$. *Provemos que a única raiz de* f *em* $[1, +\infty[$ *é 1. Com efeito, se não fosse assim, deve existir um número real* $\tilde{c} \in]1, +\infty[$ *tal que* $f(\tilde{c}) = 1$. *Isto é*

$$0 = 2\tilde{c}^3 - \sqrt{\tilde{c}^2 + 3\tilde{c}},$$

e como $\tilde{c} > 1 > 0$, *vai implicar que*

$$4\tilde{c}^6 = \tilde{c}^2 + 3\tilde{c},$$

e logo, como $\tilde{c} > 0$,

$$4\tilde{c}^5 = \tilde{c} + 3.$$

Fatorando, vamos ter que

$$(\tilde{c} - 1)\left(4\tilde{c}^4 + 4\tilde{c}^3 + 4\tilde{c}^2 + 4\tilde{c} + 3\right) = 0.$$

Mas como $\tilde{c} > 1$, *a equação anterior só pode implicar que* $\tilde{c} = 1$ *o que é um absurdo pelo que tínhamos suposto. Portanto,* f *possui uma única raiz em* $[1, +\infty[$ *e é 1.*

(d) Se $x \in]1, +\infty[$, *então* $3x^2 > 3x$. *Logo*

$$4x^2 > x^2 + 3x.$$

Agora, do exercício 4 da lista do módulo 1 além de que tanto $4x^2$ *como* x^2+3x *são positivos, teremos que*

$$2x > \sqrt{x^2+3x}.$$

Mas como $2x^3 > 2x$ *pois* $x > 1$*, então podemos concluir que*

$$f(x) = 2x^3 - \sqrt{x^2+3x} > 0,$$

para todo $x \in]1, +\infty[$. *De maneira análoga, prova-se que* $f(x) < 0$, $\forall x \in]0, 1[$.

Exercício 73 *Denotemos por* V *a função velocidade. Notemos que* V *é uma função contínua em* $\mathbb{R}$ *e que* $V(0) = V(2\pi)$. *Agora, definamos* $F(x) = V(x+\pi) - V(x)$. *Observamos que* F *é contínua em* $\mathbb{R}$. *Mais ainda, temos os seguintes casos.*
<u>*Caso 1*</u>*: Se* $F(0) = 0$*, então* $V(\pi) = V(0)$*, o que acaba a prova.*
<u>*Caso 2*</u>*: Se* $F(0) > 0$*, então*

$$\begin{aligned} F(\pi) &= V(2\pi) - V(\pi) \\ &= V(0) - V(\pi) \\ &= -F(0) < 0, \end{aligned}$$

assim

$$F(\pi) < 0 < F(0).$$

Portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in]0, \pi[$ *tal que* $F(c) = 0$*, isto é,* $V(c+\pi) = V(c)$.
<u>*Caso 3*</u>*: Se* $F(0) < 0$*, pode proceder de maneira análoga que no caso 2 e obter pelo Teorema do Valor Intermediário que existe* $\tilde{c} \in]0, \pi[$ *tal que* $V(\tilde{c}+\pi) = V(\tilde{c})$.

Exercício 74 *Denotemos por* f *a função que mede a altura que o alpinista escalou o dia sábado e por* h *a função que mede a altura que escalou no domingo. Além disso, definamos a função* $F(t) = f(t) - h(t)$. *Pelas hipóteses do problema tem-se que* f *e* h *são contínuas em* $[8, 16]$*, e assim* F *é contínua em* $[8, 16]$. *Mais ainda,*

$$\begin{aligned} F(8) &= f(8) - h(8) \\ &= -h(8) < 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F(16) &= f(16) - h(16) \\ &= f(16) > 0. \end{aligned}$$

Então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t_0 \in]8, 16[$ *tal que* $F(t_0) = 0$. *Isto é,* $f(t_0) = h(t_0)$*, o que mostra que em algum horário* t_0 *no domingo ele estava na mesma altura em que esteve no mesmo horário no sábado.*

Exercício 75 *(a) Uma função* f *tem assíntota vertical* $x = c$ *se*

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$$

e/ou,

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty.$$

(b) A função f *terá assíntota horizontal* $y = a$ *se* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$ *e/ou* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$. *O exercício 42 é um exemplo da existência de uma assíntota horizontal para uma sequência de números reais.*

(c) A reta $y = ax + b$ *é uma assíntota inclinada para* f *se existem*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0.$$

ou

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0.$$

Esta definição serve para o caso (b) mas não para o caso (a), pela definição de assíntota vertical.

(d) Pelas definições de assíntotas horizontal, vertical e inclinada vistas nos itens anteriores, segue-se que não existem tais assíntotas para este caso.

Exercício 76 *(a)* $e^{\frac{1}{3}}$. *Horizontal* $y = e^{\frac{1}{3}}$

(b) e. *Horizontal* $y = e$.

(c) e^{-6}. *Horizontal* $y = e^{-}6$.

(d) e^4. *Não define assintota.*

(e) e^4. *Não define assintota.*

(f) e. *Não.*

(g) e^2. *Horizontal* $y = e^2$.

(h) $\frac{2}{3}$. *Não.*

(i) $\frac{1}{\ln(2)}$. *Não.*

(j) 1. *Horizontal* $y = 1$.

(k) $\frac{1}{2}$, *Não.*

(l) 3. *Não.*

(m) $\frac{1}{5}$. *Não.*

(n) 0. *Horizontal* $y = 0$.

(o) $\frac{a}{b}$. *Não.*

Exercício 77 (a) *Não. Suponha que seja verdade que* $e^{x^2} = e^{2x}$. *Então,* $(e^x)^x = e^x e^x$. *Desta forma,*

$$e^{2x}(e^{x(x-2)} - 1) = 0.$$

Tal afirmação é verdadeira somente para $x = 0$ *e* $x = 2$. *Considere* $x = 1$ *e* $e \neq e^2$.

(b) *Uma é função inversa da outra. Justificando, segue que por propriedade de logaritmo* $\log_a(a^x) = x\log_a(a) = x$.

Por outro lado, $a^{\log_a x}$, *temos por definição que* $\log_a x = y$, *ou seja,* $a^y = x$. *Deste modo,* $a^{\log_a x} = a^y = x$.

Exercício 78 (a) $\frac{2}{3}$.

(b) 1.

(c) $\frac{1}{2}$.

(d) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$. *Assíntotas verticais:* $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. *Assíntotas horizontais:* $y = \ln(2)$.

Exercício 79 (a) ∞.

(b) $-\infty$.

(c) $\frac{\pi}{2}$.

(d) 0.

(e) *Limite não faz sentido.*

(f) $y = 0$ *é reta assíntota horizontal e* $x = 32$ *e* $x = -4$ *são retas assíntotas verticais.*

(g) ∞, *então não tem assíntota.*

Exercício 80 Caso $p < 1$: *Neste caso, teremos* $1 - p > 0$ *e portanto, teremos*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^{1-p}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Caso $p = 1$: *Nesse caso* $1 - p = 0$ *e portanto*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^{1-p}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^{1-1}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Caso $p > 1$: *Nesse caso* $1 - p < 0$ *e portanto*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1-p]}} = \lim_{x\to\infty} x^{p-1} = \infty.$$

Exercício 81 *(a)* $(\cosh(x))^2 = \dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}$ *e* $(\operatorname{senh}(x)) = \dfrac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$, *logo*

$$(\cosh(x))^2 - (\operatorname{senh}(x))^2 = \frac{4}{4} = 1.$$

(b) $\cosh(x) + \operatorname{senh}(x) = \dfrac{2e^x}{2} = e^x$ *e* $\cosh(x) - \operatorname{senh}(x) = \dfrac{2e^{-x}}{2} = e^{-x}$.

(c) Seja $x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$. *Então,* $2x = e^y - e^{-y}$. *Dividindo por* e^{-y} *ambos os lados obtemos,* $2xe^y = (e^y)^2 - 1$. *Denote por* $z = e^y$ *e assim* $y = \ln(z)$. *Deste modo,* $2xz = z^2 - 1$. *Calculando por Bhaskara, temos*

$z = \dfrac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$. *Mas* $y = \ln(z)$, *logo* $y_1 = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ *e* $y_2 = \ln(x - \sqrt{x^+1})$, *como* $x - \sqrt{x^2 - 1} < 0$, *a única solução será* $y_1 = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. *Como queríamos provar.*

(d) $\cosh(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$.

$\operatorname{senh}(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = -\operatorname{senh}(x)$.

Utilizando os itens anteriores, temos $\tanh(-x) = \dfrac{\operatorname{senh}(-x)}{\cosh(-x)} = \dfrac{-\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} = -\tanh(x)$.

(e) $\tanh(x) = \dfrac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. *Colocando* e^{-x} *em evidência,*

temos $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

(f) Fazendo $\operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senh}(y) = 2\dfrac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{4} = \operatorname{senh}(x+y)$. *Para* $\operatorname{senh}(2x)$ *basta aplicar a fórmula anterior.*

(g) Pelo item (e) *temos* $\tanh(x)^2 = \dfrac{e^{4x} - 2e^{2x} + 1}{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}$. *Fazendo* $1 - \tanh(x)^2$, *obtemos*

$$\frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1 - e^{-4x} + 2e^{2x} - 1}{e^{4x} + 2e^{2x} + 1} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{2^2}{(e^{-x})^2(e^{2x}+1)^2} = \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2 = \operatorname{sech}(x)^2.$$

(h) Não há o que escrever.

(i) $\operatorname{senh}(x)$ *no conjunto dos reais. Calculada no item* c.

$\cosh(x)$ *é invertível no intervalo* $[1, +\infty)$. *Com inversa,* $\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

$\tanh(x)$ *é invertível em* $(-1, 1)$. *Com inversa,* $\operatorname{arctanh}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercício 82 *(a)* $2p$.

(b) $\dfrac{1}{3}$.

(c) $f'(2) = 4$ *e* $f'(\frac{1}{3}) = \dfrac{2}{3}$. *Esses valores são os coeficiente angulares das retas tangente ao gráfico nos pontos* $p = 2$ *e* $p = \frac{1}{3}$.

(d) Basta trocar p *por* x.

(e) $a(x) = 6x$.

Exercício 83 (a) *A velocidade instantânea é definida como a derivada temporal da equação horária. Desta forma, teremos que a velocidade instantânea é dada pela seguinte função*

$$v(t) = f'(t) = 112 - 32t.$$

Logo, teremos

$$t = 2 \implies v(2) = 112 - 32 \cdot 2 = 48m/s$$

$$t = 3 \implies v(3) = 112 - 32 \cdot 3 = 16m/s$$

$$t = 4 \implies v(4) = 112 - 32 \cdot 4 = -16m/s$$

(b) *O ponto de máximo sera dado quando a derivada da função for nula, isto é*

$$v(t) = 112 - 32t = 0 \implies t = \frac{112}{32} = 3,5s$$

(c) *O objeto atinge o chão quando*

$$f(t) = 112t - 16t^2 = 0.$$

Resolvendo a equação a cima, teremos $t = 0set = 7s$. *Como* $t = 0s$ *é o início do movimento, o objeto toca o chão em* $t = 7s$.

(d) *Em* $t = 7$, *teremos*

$$v(7) = 112 - 32 \cdot 7 = 112m/s.$$

Exercício 84 (a) $y = 5x + 4$ *e* $y = 5x + 4$.

(b) $(0,100)$ *não é ponto do gráfico e* $y = x + 1$.

(c) $y = x$.

Exercício 85 (a) *A reta tangente ser horizontal significa que o seu coeficiente angular é zero, isto é,*

$$y'(x) = 3x^2 + 4x - 4 = 0.$$

Resolvendo a equação a cima, teremos $x = \frac{2}{3}$ *e* $x = -2$.

(b) *Podemos calcular o coeficiente angular da reta* $2y + 8x - 5$ *como*

$$y' = \left(-4x + \frac{5}{2}\right)' = -4$$

Portanto, queremos encontrar os x *que são soluções para a equação*

$$3x^2 + 4x - 4 = -4 \implies 3x^2 + 4x = 0$$

Logo $x = 0$ *e* $x = \frac{-4}{3}$.

Exercício 86 (a) *Para que as curvas sejam tangentes no ponto* $(1,0)$, *precisamos, primeiramente, que elas passem pelo ponto* $(1,0)$. *Assim sendo, temos que*

$$\begin{aligned} 0 = 1^2 + A \cdot 1 + B &\implies B = -1 - A \\ 0 = C \cdot 1 - 1^2 &\implies C = 1 \end{aligned}$$

Em segundo lugar, precisamos que suas retas tangentes a esse ponto possuam o mesmo coeficiente angular, isto é,

$$\left(x^2 + Ax - B\right)'(1) = \left(X - X^2\right)'(1),$$

e portanto

$$2 \cdot 1 + A = -2 \cdot 1 \implies A = -4$$

$A = -4$, $B = 3$ *e* $C = 1$.

(b) *Em primeiro lugar, note que*

$$y' = 3x^2 - 4x,$$

desta forma

$$y'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 4.$$

Sendo a derivada da função no ponto $x = 2$ *o coeficiente angular da reta tangente neste ponto, teremos* $y = 4x - 4$.

Para a reta normal teremos $y = \frac{-1}{4}x + \frac{9}{2}$.