Lista de Exercícios de SMA0353-Cálculo I - Módulo 3

Exercícios iniciais: 1,8,12,18,21,28,34 e 41.

Derivada como taxa de variação: Velocidade e aceleração; reta tangente

Exercício 1 *A posição de um corpo que se desloca ao longo do eixo* s *no instante* t *é dada por uma equação* $s = f(t)$*, sendo* s *dado em metros e* t *em segundos.*

(a) Determine o deslocamento do corpo e a velocidade média para o intervalo dado.

(b) Determine o módulo de velocidade e a aceleração do corpo nas extremidades do intervalo.

(c) Quando, se de fato acontece, o corpo muda de direção durante o intervalo?

1. $s = t^2 - 3t + 2, \qquad 0 \leq t \leq 2$
2. $s = 6t - t^2, \qquad 0 \leq t \leq 6$
3. $s = -t^3 + 3t^2 - 3t, \qquad 0 \leq t \leq 3$
4. $s = \dfrac{t^4}{4} - t^3 + t^2, \qquad 0 \leq t \leq 3$

Exercício 2 ***Movimento de uma partícula.*** *No instante* t*, a posição de um corpo que se desloca ao longo do eixo* s *é* $s = t^3 - 6t^2 + 9t$*.*

(a) Determine a aceleração do corpo cada vez que a velocidade for nula.

(b) Determine o módulo da velocidade do corpo cada vez que a aceleração for nula.

(c) Determine a distância total percorrida pelo corpo de $t = 0$ *a* $t = 2$*.*

Exercício 3 ***Queda livre em Marte e Júpiter.*** *As equações para queda livre nas superfícies de Marte e Júpiter (sendo* s *dado em metros e* t *em segundos) são* $s = 1,86t^2$ *em Marte e* $s = 11,44t^2$ *em Júpiter. Quanto tempo uma pedra leva, a partir do repouso, para atingir a velocidade de* $27,8\text{m/s}$ *(cerca de* 100km/h*) em cada planeta?*

Exercício 4 *Um objeto é lançado verticalmente do chão para cima com velocidade inicial de* $112\,\text{m/s}$ *e a altura atingida no instante* t *segundos é* $f(t) = 112t - 16t^2$ *metros. Pergunta-se:*
a) Quais as velocidades do objeto nos instantes $t = 2$*,* $t = 3$ *e* $t = 4$ *segundos?*
b) Em que instante o objeto alcança a altura máxima?
c) Em que instante o objeto atinge o chão?
d) Com que velocidade o objeto atinge o chão?

Exercício 5 *Um carro está a* $16t^{3/2} - 24t + 16$ *quilômetros a leste de um referencial fixo no instante* t *horas. Pergunta-se:*
a) Qual a velocidade do carro no instante $t = 1/4$ *horas e qual é o sentido em que ele se move?*
b) Onde está o carro quando sua velocidade é zero?

Diferenciabilidade (Nota: diferenciável é sinônimo de derivável.)

Exercício 6 *Considere* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x^2, & 1 \leq x \leq 9 \\ 27\sqrt{x}, & x > 9 \end{cases}$.
a) Determine os pontos $x \in \mathbb{R}$ *onde* f *é diferenciável.*
b) Onde existe f^{-1}*, isto é, a função inversa de* f*?*
c) Determine os pontos onde f^{-1} *é diferenciável e calcule* $(f^{-1})'$ *nesses pontos.*

Exercício 7 *Verifique se a função abaixo é diferenciável no ponto* $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ se } x \leq 2 \\ x + 2 & , \text{ se } x > 2 \end{cases}$$

Exercício 8

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & , \text{ se } x \neq 2 \\ 4 & , \text{ se } x = 2 \end{cases}$$

(a) Calcule $f'(2)$ *usando o limite. Por que* $f'(2)$ *não é zero ? (Ou seja, não podemos usar em* $x = 2$*, a regra de derivação de uma constante.) Ilustre isso no gráfico de f.*

(b) Qual o limite para verificar continuidade em $x = 2$*? f é contínua para* $x = 2$.

(c) Compare as expressões dos limites dos itens (a) e (b) e conclua: dada uma função qualquer g, temos 2 limites essenciais, o limite que verifica a continuidade de g em $x = p$ *e o limite que calcula a derivada de g em* $x = p$. *Escreva-os.*

(d) Escreva também os limites que encontram possíveis assíntotas verticais e horizontais.

(e) Refaça os itens (a) e (b) considerando a nova função abaixo e percebendo o que muda nas respostas.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & , \text{ se } x \neq 2 \\ 1 & , \text{ se } x = 2 \end{cases}$$

Exercício 9

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , \text{ se } x < 2 \\ 1 & , \text{ se } x \geq 2 \end{cases}$$

(a) f é contínua em 2? Por quê?
(b) f é derivável em 2? Por quê?
(c) Ilustre estes fatos no gráfico de f.
(d) Qual o domínio da função derivada $f'(x)$*?*

Exercício 10

$$f(x) = \begin{cases} -x+4 & , \textit{ se } x < 4 \\ x-4 & , \textit{ se } x \geq 4 \end{cases}$$

(a) f é contínua em 4? Por quê?
(b) f é derivável em 4? Por quê?
(c) Ilustre estes fatos no gráfico de f.
(d) Qual o domínio da função derivada $f'(x)$*?*

Exercício 11

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \textit{ se } x < 0 \\ -x^2 & , \textit{ se } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) f é contínua em 0? Por quê?
(b) f é derivável em 0? Por quê?
(c) E nos outros pontos, f é contínua e derivável? Justifique.
(d) Ilustre estes fatos no gráfico de f.
(e) Qual o domínio da função derivada $f'(x)$*?*

Exercício 12 *(a) Mostre que se* f *é diferenciável em* p *então* f *é contínua em* p.
(b) Vale a volta (ou seja, recíproca) deste Teorema? (Isto é, se f *é contínua então f é diferenciável?) Ou será que existe função contínua mas não diferenciável? Dê exemplo.*

Exercício 13 *Verifique se as funções*

$$(a)\, f(x) = \begin{cases} x^2 & , \textit{ se } x \leq 0 \\ x & , \textit{ se } x > 0 \end{cases}$$

$$(b)\, f(x) = \begin{cases} x^2 & , \textit{ se } x \leq 0 \\ 0 & , \textit{ se } x > 0 \end{cases}$$

são diferenciáveis em $x = 0$.

Exercício 14 *Seja* $f(x) = |x|$.
(a) f é contínua em 0? Por quê?
(b) f é derivável em 0? Por quê?
(c) E nos outros pontos, f é contínua e derivável? Justifique.
(d) Ilustre estes fatos no gráfico de f.

Exercício 15 *Seja* $f(x) = x^{1/3}$.
(a) f é contínua em 0?
(b) Calcule f'(x).
(c) Existe f'(0)? Por quê?

Exercício 16 *A função*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \textit{ se } x \geq 0 \\ -1 & , \textit{ se } x < 0 \end{cases}$$

possui derivada em $x = 0$*? Justifique. Faça o gráfico e explique.*

Exercício 17 *Considere a função* $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & , \textit{ se } x \neq 0 \\ 0 & , \textit{ se } x = 0 \end{cases}$. *(a) Encontre* $f'(x)$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*. Pergunta-se:* f' *é contínua em* $\mathbb{R}$*? Qual o domínio de* f'*?*

(b) Refaça o item (a) para a função abaixo e responda o que mudou.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & , \textit{ se } x \neq 0 \\ 2 & , \textit{ se } x = 0 \end{cases}.$$

Exercício 18 *Monte o limite das derivadas das funções abaixo e resolva-os:*

$(a) f = k,$ $\quad (b) f(x) = x^n,$ $\quad (c) f(x) = x^{1/n},$ $\quad (d) f(x) = \operatorname{sen}(x),$

$(e) f(x) = \cos(x)$ $\quad (f) f(x) = e^x$ $\quad (g) f(x) = \ln(x)$ $\quad (h) f(x) = a^x$

OBS: Após montar os limites das derivadas, observe que a maioria deles foram resolvidos na Lista 1.
(i)Note que as regras (b) e (c) se resumem a uma regra bem conhecida. Qual? (Essa regra também vale para expoente real r *fixo, ou seja, para* $f(x) = x^r$ *temos* $f'(x) = rx^{r-1}$*. A prova disto, veremos depois.)*
(j) Por que a regra de derivação de $f(x) = x^r$*, ou seja,* $f'(x) = rx^{r-1}$ *não se aplica à função* $f(x) = a^x$*? Dica: compare os limites de (b) e (h).*

Regras de Derivação

Exercício 19 *Calcule a derivada das seguintes funções :*

a) $f(t) = 37,$ $\quad$ b) $g(x) = 17x - 65$ $\quad$ c) $H(u) = \dfrac{5u+1}{3\sqrt{u}}$ $\quad$ d) $\dfrac{du}{dx}$ se $u = x^3 + x$

e) $f(t) = t^{1/2} + k$ $\quad$ f) $g(u) = u^{-2} + m$ $\quad$ g) $f(t) = 2\operatorname{sen}(t) + \dfrac{1}{2}\ln(a)$ $\quad$ h) $\dfrac{dy}{dt}$ se $y = t - 2\dfrac{1}{t}$

(i) $f(x) = x^3 + F(x)$ $\quad$ j) $h(u) = 2F(u) - 3e^u$ $\quad$ k) $f(x) = -3\cos(x) + 20x^{-3/2}$

(l) *Agora calcule as derivadas segundas das funções dos itens acima.*
(m) *No item* (i) *se soubermos que* $F'(2) = 5$ *(dados de laboratório, por exemplo), quanto vale* $f'(2)$.
(n) *Derive* $f(x) = g(x) + \operatorname{sen}(x) + u$.

Exercício 20 (a) *Encontre a derivada de* $f(u) = \dfrac{6}{u^2}$ *usando a "regra do tombo".*

(b) *Encontre a derivada de* $f(u) = \dfrac{6}{u^2}$ *usando a regra do quociente.*

(c) *O que você conclui a partir dos itens acima?*

(d) *Calcule as derivadas de* $f(x) = 3^x$ *e* $g(x) = x^3$. *O que você conclui? Usam a mesma regra de derivação?*

Exercício 21 *(a) Usando o limite da velocidade média de* fg*, explique porquê* $\frac{d}{dx}fg(x) \neq f'(x)g'(x)$.

(b) Use a regra do produto para derivada para descobrir a regra do quociente. Ou seja, se $F = f/g$*, escreva* $Fg = f$ *e descubra* F'.

(c) Sabendo que $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ *para n natural positivo, use a regra do quociente para mostrar que vale a mesma regra para expoente negativo:* $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} \implies f'(x) = -n\,x^{-n-1}, \quad x \neq 0, \quad n$ *um inteiro positivo.*

(d) Use a regra do quociente para mostrar que

$f(x) = \log_a(x) \implies f'(x) = \dfrac{1}{\ln(a)\cdot x}, x > 0.$

Dica: use que $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ *e que* $\dfrac{d}{dx}\ln(x) = \dfrac{1}{x}$.

Exercício 22 *Calcule a derivada de:*

a) $f(x) = (2\cos(x) + \operatorname{sen}(x))\left(x^2 + \log_5(x) + 2x\right)$ b) $f(x) = \operatorname{senh}(x)\cdot\tan(x)$

c) $f(x) = \operatorname{sen}(x)\ln(x)(e^x + 1)$ d) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x) + 1}{\ln(x) + 2^x + 2^3 + k}$, k *contante* $\in \mathbb{R}$

e) $f(x) = \dfrac{2\cos(x)}{x^2 + \frac{1}{2}x + 1}$ f) $f(x) = \dfrac{(x^3 + 7)\cos(x)}{x^2(\operatorname{sen}(x) + 1)}$

Exercício 23 *As funções* $\operatorname{senh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $\cosh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dadas por*

$$\operatorname{senh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

são chamadas seno hiperbólico *e* cosseno hiperbólico*, respectivamente. Mostre que:* $\dfrac{d}{dx}\operatorname{senh}x = \cosh x$ *e* $\dfrac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh}x$ *(usa regra da cadeia).*

Exercício 24 *Calcule a derivada das seguintes funções (envolvem regra da cadeia):*

a) $f(x) = \cos^6(x)$ b) $F(v) = (17v - 5)^{1000}$ c) $g(z) = (1 + \sqrt{z})^2$

d) $g(t) = [(1 + \dfrac{1}{t})^{-1} + 1]^{-1}$ e) $f(x) = \operatorname{sen}(9x + 4)$ f) $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$

g) $f(x) = \operatorname{sen}((2x + 3)^4)$ h) $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x}) + \sqrt{\operatorname{sen}(x)}$ i) $y = \left(\dfrac{x^2 + x}{\operatorname{sen}(x) + x^3}\right)^3$

j) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x) + x + 1 + x^3}}$ k) $y = \operatorname{sen}(\tan(e^x))$ l) $h(x) = f(2x) + \operatorname{sen}(g(x))$

Exercício 25 *Verifique se a função abaixo é diferenciável para* $x \neq 2$ *e para o ponto* $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} x\,\text{sen}(\pi x) & , \; se\ x \leq 2 \\ (x^2+1)\cos(\pi x) & , \; se\ x > 2 \end{cases}$$

Exercício 26 *Calcule a derivada das seguintes funções :*

a) $g(x) = \ln(3 + \text{sen}^2(x))$ b) $H(x) = e^{x^3 - \ln(x^2+1)}$ c) $F(x) = \ln(x + \cos(x))$

d) $g(x) = \dfrac{(3x+5)^6\sqrt{x^4+3x^2}}{[(e^{3x}+7)^2]^{\frac{1}{3}}}$ e) $g(x) = \log_2(x^5)$ f) $f(x) = \dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{3x}-a^{-3x}}$

g) $f(x) = \ln\dfrac{x^2+1}{x^2+3}$ h) $f(x) = \ln\left(e^{5x-2} + \dfrac{1}{e^{5x-2}}\right)$ i) $f(x) = x^{\sqrt{2}}$

Exercício 27 *Calcular* $f'(x)$ *nos seguintes casos:*

a) $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ b) $f(x) = e^{x^2}$ c) $f(x) = e^{2x}\ln\left(x\,\text{sen}(x) + \dfrac{e^{-x}}{x^5+1}\right)$

d) $f(x) = e^{x^3 - \ln(x^2+1)}$

Exercício 28 *Sejam* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funções diferenciáveis em* $\mathbb{R}$ *tais que* $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = -f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
a) Mostre que $(f(x) - \text{sen}(x))^2 + (g(x) - \cos(x))^2 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.
b) Conclua que $f(x) = \text{sen}(x)$ *e* $g(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 29 *Calcular a derivada das seguintes funções :*

a) $f(x) = \text{tg}(\sec(x\sqrt{x^2+\sqrt{x}+1}))$ b) $f(x) = \text{cossec}(x^2+4)$

c) $f(x) = \sec(\sqrt{x-1})$ d) $f(x) = \text{tg}^2(x)\sec^3(x)$

e) $f(x) = \dfrac{x^3\sec(x)\,\text{tg}(x)}{(x^2+1)\cos(x)}$ f) $F(x) = \dfrac{\cos(x)\,\text{cotg}(x)}{\sec(x)-\cos(x)}$

g) $F(x) = \text{senh}(x)\cosh(x)$ h) $f(x) = \text{arctg}(e^{3x})$

i) $f(x) = \dfrac{e^{\sec(x^2)}}{x}$ j) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{\text{arctg}(1-2x)}\right)$

k) $f(x) = 2^{3x}\,\text{arcsen}(4x)$ l) $f(x) = \ln(2x)\log_{10}(x) - \ln(a)\log_a(x)$

m) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2\log_2(x) - \dfrac{\log_2(x)}{x}$ n) $f(x) = \text{arctg}(12x-7)$

o) $f(x) = \text{arcsen}\left(\dfrac{3x+1}{x}\right)$ p) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

Exercício 30 *Seja* $x = \cos\omega t$, *onde* ω *é constante. Mostre que* $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$.

Exercício 31 *Suponha que* f *e* g *sejam funções tais que* $f'(x) = 1/x$ *e* $f(g(x)) = x$. *Mostre que se* $g'(x)$ *existe, então* $g'(x) = g(x)$.

Exercício 32 *a)Ache todas as derivadas (n-ésimas derivadas) não identicamente nulas de* $f(x) = (x^2 - 1)^3$.
b)Se $f(x) = 1/x$, *obtenha uma fórmula para* $f^{(n)}(x)$, *onde* n *é um inteiro positivo. Quanto é* $f^{(n)}(1)$*?*
c)Se $f(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 7x$, *determine a equação da tangente ao gráfico de* f' *no ponto* $P = (2, 3)$.
d)Se $y = f(g(x))$ *e* f" *e* g" *existem, use a regra da cadeia para exprimir* $D_x^2 y$ *em termos das derivadas primeira e segunda de* f *e* g.

Exercício 33 *Calcule a derivada das seguintes funções (use diferenciação logarítmica):*

a) $f(x) = (e^{2x} + 7)^{\cos(x^2)}$ b) $f(x) = x^2 e^{\sqrt{2x}}$ c) $f(x) = x^{x^{x^x}}$, $x > 0$

Exercício 34 *Encontre, em cada um dos itens abaixo,* $\dfrac{dy}{dx}$, *onde* $y = y(x)$ *é dada implicitamente pelas equações abaixo:*

a) $\cos^2(x + y) = 1/4$ b) $y^3 = \dfrac{x - y}{x + y}$ c) $(y^2 - 9)^4 = (4x^2 + 3x - 1)^2$
d) $x^3 + x^2 y - 2xy^2 + y^3 - 1 = 0$ e) $\operatorname{sen}(xy) + y - x^2 = 0$ f) $xy + 16 = 0$
g) $x \operatorname{arctg}(x) + y^2 = 4$ h) $\sqrt{2x + y} + \sqrt{x + 2y} = 6$ i) $\operatorname{senh}(x^2 y) + \cosh(y^2 - \cos(xy)) = 2$

(j) Nos itens (a) e (f) encontre $\dfrac{dx}{dy}$. *(Neste caso, estamos pensando que x é uma função de* y, *ou seja,* $x = g(y)$.*)*

Exercício 35 *Encontrar as equações das retas tangentes à elipse* $4x^2 + 9y^2 = 40$ *cujos coeficientes angulares valem* $-2/9$. *Use derivação implícita.*

Exercício 36 *Um ponto* P *move-se ao longo da elipse* $x^2 + 4y^2 = 1$. *A abscissa* x *está variando a uma velocidade* $\dfrac{dx}{dt} = \operatorname{sen}4t$. *Mostre que:* $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-x \operatorname{sen}4t}{4y}$.

Exercício 37 *Suponha que f seja uma função injetora, derivável, e que sua inversa,* f^{-1}, *também seja derivável. Mostre que* $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Exercício 38 *Nos itens (a) e (b), mostre que* $\arccos' x = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
(a) Use para isto o método de derivação implícita. Discuta também o domínio.
(b) Use Exercício 37.

Exercício 39 *Seja* $y = f(x)$ *uma função diferenciável tal que* $x^3 f^2(x) + \cos(\sqrt{f(x)}) = x$. *Determine* $f'(x)$.

Exercício 40 *Seja* $f(x) = x + e^x$ *e* g *a função inversa de* f. *Demonstre que* g *é diferenciável e que* $g'(x) = \frac{1}{1+e^{g(x)}}$. *Calcule* $g'(1)$ *e* g"(1).

Exercício 41 *Seja* $f(x) = x + x^3$.
a)Mostre que f *admite função inversa* g.
b)Expresse $g'(x)$ *em termos de* $g(x)$.
c)Calcule $g'(0)$.

Gabarito da Lista de Exercícios de SMA0353-Cálculo I - Módulo 3

Última atualização em 10/05/2022

Exercício 1 (a) 1. *Temos que* $s(0) = 2m$ *e* $s(2) = 0m$, *assim, o deslocamento do corpo é* $\Delta s = s(2) - s(0) = -2m$.

A velocidade média é $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, *então temos* $v_m = \frac{-2}{2-0} = -1m/s$.

2. *Temos que* $s(0) = 0m$ *e* $s(6) = 0m$, *assim, o deslocamento do corpo é* $\Delta s = s(6) - s(0) = 0m$.

A velocidade média é $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, *então temos* $v_m = \frac{0}{6-0} = 0m/s$.

3. *Temos que* $s(0) = 0m$ *e* $s(3) = -9m$, *assim, o deslocamento do corpo é* $\Delta s = s(3) - s(0) = -9m$.

A velocidade média é $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, *então temos* $v_m = \frac{-9}{3-0} = -3m/s$.

4. *Temos que* $s(0) = 0m$ *e* $s(3) = 2,25m$, *assim, o deslocamento do corpo é* $\Delta s = s(3) - s(0) = 2,25m$.

A velocidade média é $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, *então temos* $v_m = \frac{2,25}{3-0} = 0,75m/s$.

(b) *Como* $v = \frac{ds}{dt}$ *e* $a = \frac{dv}{dt}$,

1. *Temos que*

$$v(t) = 2t - 3$$

e

$$a(t) = 2.$$

Assim $|v(0)| = 3m/s$, $|v(2)| = 1m/s$ *e* $a(0) = a(2) = 2m/s^2$.

2. *Temos que*

$$v(t) = 6 - 2t$$

e

$$a(t) = -2.$$

Assim $|v(0)| = 6m/s$, $|v(6)| = 6m/s$ *e* $a(0) = a(6) = -2m/s^2$.

3. *Temos que*

$$v(t) = -3t^2 + 6t - 3$$

e

$$a(t) = -6t + 6.$$

Assim $|v(0)| = 3m/s$, $|v(3)| = 12m/s$, $a(0) = 6m/s^2$ *e* $a(3) = -12m/s^2$.

4. *Temos que*

$$v(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$$

e

$$a(t) = 3t^2 - 6t + 2.$$

Assim $|v(0)| = 0m/s$, $|v(3)| = 6m/s$, $a(0) = 2m/s^2$ *e* $a(3) = 11m/s^2$.

(c) *O corpo muda de direção no instante t tal que v(t) = 0.*

1. *Como* $0 = v(t) = 2t - 3$ *logo* $t = 1,5s$.
2. *Como* $0 = v(t) = 6 - 2t$ *logo* $t = 3s$.
3. *Como* $0 = v(t) = -3t^2 + 6t - 3$ *logo* $t = 1s$.
4. *Como* $0 = v(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$ *logo* $t = 1s$ *e* $t = 2s$.

Exercício 2 (a) *Notemos que* $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$ *logo a velocidade é nula se* $3t^2 - 12t + 9 = 0$. *Isto é, a velocidade é nula em* $t = 1s$ *e* $t = 3s$. *Além disso, a função aceleração é* $a(t) = 6t - 12$ *e assim, a aceleração nos instantes que a velocidade é nula vao ser* $a(1) = -6m/s^2$ *e* $a(3) = 6m/s^2$.

(b) *Pelo feito no item a),* $a(t) = 6t - 12$. *Logo a aceleração é nula em* $t = 2s$. *Assim, o módulo da velocidade do corpo em* $t = 2s$ *é* $|v(2)| = 3m/s$.

(c) *A distância total percorrida pelo corpo é* $s(2) - s(0) = 2 - 0 = 2m$.

Exercício 3 *Como* $v = \frac{ds}{dt}$, *temos que*

$$v_{\text{Marte}} = 3,72t$$

e

$$v_{\text{Jupiter}} = 22,88t.$$

Logo, o tempo que vai levar a pedra atingir a velocidade de 27,8 m/s em Marte vai ser de $t = \frac{27,8}{3,72} = 7,47s$ *e em Jupiter vai ser de* $t = \frac{27.8}{22,88} = 1,22s$.

Exercício 4 (a) *Temos que a velocidade vai ser* $v(t) = 112-32t$. *Assim,* $v(2) = 48m/s$, $v(3) = 16m/s$ *e* $v(4) = -16m/s$.

(b) *A altura máxima é alcançada no instante* t *tal que* $v(t) = 0$. *Logo,* $t = \frac{112}{32} = 3,5s$.

(c) *O objeto atinge o chão no instante t tal que* $s(t) = 112t - 16t^2 = 0$ *onde* $t \neq 0$. *Logo* $t = 7s$.

(d) *A velocidade no instante* $t = 7s$ *é* $v(7) = 112m/s$.

Exercício 5 *(a) Temos que* $v(t) = \frac{ds}{dt} = 24t^{\frac{1}{2}} - 24$ *logo* $v\left(\frac{1}{4}\right) = 24.(0,5) - 24 = -12$ *Isso significa que a velocidade é de 12 m/s com sentido oposto ao positivo no referencial. Assim, o carro move-se 12 m/s ao oeste.*

(b) Se $v(t) = 0$, *logo* $24t^{\frac{1}{2}} - 24 = 0$ *e assim* $t = 1s$. *Assim, temos que* $s(1) = 16-24+16 = 8m$.

Exercício 6 (a) *Para* $f(x)$ *ser diferenciável em* $x = a$, *precisamos verificar a existência do seguinte limite* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Para $a < 1$, *temos*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{x-a} = \lim_{x\to a} 1 = 1$$

Para $a = 1$, *temos*

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} x+1 = 1+1 = 2$$

Para $1 < a < 9$, *temos*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim_{x\to a} x+a = 2a$$

Para $a = 9$, *temos*

$$\lim_{x\to 9^-} \frac{f(x)-f(9)}{x-9} = \lim_{x\to 9^-} \frac{x^2-9^2}{x-9} = \lim_{x\to 9^-} \frac{(x+9)(x-9)}{x-9} = \lim_{x\to 9^-} x+9 = 9+9 = 18$$

$$\lim_{x\to 9^+} \frac{f(x)-f(9)}{x-9} = \lim_{x\to 9^+} \frac{27\sqrt{x}-9^2}{x-9} = 27\lim_{x\to 9^+} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = 27\lim_{x\to 9^+} \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} =$$

$$27\lim_{x\to 9^+} \frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = 27\lim_{x\to 9^+} \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

Para $a > 9$, *temos*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{27\sqrt{x}-27\sqrt{a}}{x-a} = 27\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = 27\lim_{x\to a} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} =$$

$$27\lim_{x\to a} \frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = 27\lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{27}{2\sqrt{a}}$$

Portando, f *é diferenciável em* $\{x \in \mathbb{R}; x \neq 1 \text{ e } x \neq 9\}$

(b) *Para* $f(x) = x$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$, *onde o domínio de* $f^{-1}(x)$ *é* $\{x \in \mathbb{R}; x < 1 \text{ e } x \neq 0\}$.

Para $f(x) = x^2$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, *como o domínio de* f *é* $\{x \in \mathbb{R}; 1 \leqslant x \leqslant 9\}$ *e seu contradomínio é* $\{x \in \mathbb{R}; 1 \leqslant x \leqslant 81\}$, *todos os valores de* x *para* $f^{-1}(x)$ *serão positivos, desse modo sempre existirá raiz real e o domínio de* f^{-1} *será* $\{x \in \mathbb{R}; 1 \leqslant x \leqslant 81\}$ *e seu contradomínio será* $\{x \in \mathbb{R}; 1 \leqslant x \leqslant 9\}$.

Para $f(x) = 27\sqrt{x}$, $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{729}$ *e seu domínio será* $\{x \in \mathbb{R}; x > 81\}$

Portanto $f^{-1}(x)$ *existe para todo* $x \in \mathbb{R} \setminus 0$.

(c) *Temos*

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 1 \ e \ x \neq 0 \\ \sqrt{x}, & 1 \leq x \leq 81 \\ \frac{x^2}{729}, & x > 81 \end{cases}$$

Para $a < 1$ *e* $x \neq 0$, *temos*

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{a-x}{xa}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{-1(x-a)}{xa(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{-1}{xa} = -\frac{1}{a^2}$$

Para $a = 1$, *temos*

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-1(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} =$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

Para $1 < a < 81$, *temos*

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} =$$

$$\lim_{x\to a} \frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Para $a = 81$, *temos*

$$\lim_{x\to 81^-} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(81)}{x-81} = \lim_{x\to 81^-} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{81}}{x-81} = \lim_{x\to 81^-} \frac{\sqrt{x}-9}{x-81} \cdot \frac{\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}+9} =$$

$$\lim_{x\to 81^-} \frac{x-81}{(x-81)(\sqrt{x}+9)} = \lim_{x\to 81^-} \frac{1}{\sqrt{x}+9} = \frac{1}{\sqrt{81}+9} = \frac{1}{18}$$

$$\lim_{x\to 81^+} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(81)}{x-81} = \lim_{x\to 81^+} \frac{\frac{x^2}{729} - \sqrt{81}}{x-81} = \lim_{x\to 81^+} \frac{x^2 - 9\cdot 729}{729(x-81)} =$$

$$\lim_{x\to 81^+} \frac{x^2 - 81^2}{729(x-81)} = \lim_{x\to 81^+} \frac{(x-81)(x+81)}{729(x-81)} = \lim_{x\to 81^+} \frac{x+81}{729} = \frac{162}{729} = \frac{2}{9}$$

Para $a > 81$, *temos*

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{x^2}{729} - \frac{a^2}{729}}{x-a} =$$

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{729(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x+a)}{729(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{729(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{x+a}{729} = \frac{2a}{729}$$

A derivada de f^{-1} *é dada por*

$$(f^{-1})'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}, & x < 1 \text{ e } x \neq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 1 < x < 81 \\ \frac{2x}{729}, & x > 81 \end{cases}$$

e f^{-1} *não é derivável em* $x = 1$ *e* $x = 81$.

Exercício 7 *Para* $f(x)$ *ser diferenciável em* $x = 2$, *precisamos verificar a existência do seguinte limite* $\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x+2)(x-2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} x + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x + 2 - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} 1 = 1$$

Como $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \neq \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$, *então* $\nexists \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ *e portanto* f *não é diferenciável em* $x = 2$.

Exercício 8

(a) *Calcularemos primeiro a derivada* $f'(2)$ *utilizando limite:*

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{x^2-4}{x-2} - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{(x+2)(x-2)}{x-2} - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x + 2 - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x - 2}{x - 2} = 1.$$

A derivada de uma função representa o coeficiente angular da reta tangente à função f *no ponto* $(x, f(x))$. *Desta forma, a derivada de* x *só seria nula se o gráfico da função fosse paralelo ao eixo* x *em um intervalo em torno de* $x = 2$. *Além disso, é importante perceber que para realizar o cálculo da derivada em um ponto, não é correto calcular* $f(x)$ *(que possui um valor constante) e depois a derivada, pois desse modo a derivada seria nula em qualquer ponto.*

(b) *Como* $2 \in \text{Dom}(f)$, *para descobrir se* f *é contínua em* $x = 2$, *deve-se calcular o limite de* $f(x)$ *com* x *tendendo a* 2 *e verificar se assume o mesmo valor de* $f(2)$:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} x + 2 = 2 + 2 = 4$$

Como $\lim_{x\to 2} f(x) = 4 = f(2)$, *então* f *é contínua em* $x = 2$.

(c) *Como visto no item (b), o limite que verifica a continuidade de uma função* g *em um ponto* $p \in \text{Dom}(g)$ *é*

$$\lim_{x\to p} g(x)$$

e esse limite deve ser igual a $g(p)$.

E como visto no item (a), o limite que calcula a derivada de g *em* $p \in \text{Dom}(g)$ *é*

$$g'(p) = \lim_{x\to p} \frac{g(x) - g(p)}{x - p}$$

(d) *Para calcular possíveis assíntotas verticais, deve-se tomar os limites:* $\lim_{x\to p^+} g(x)$ *e* $\lim_{x\to p^-} g(x)$*; Caso algum destes limites resultar em* $+\infty$ *ou* $-\infty$*, então a reta* $x = p$ *será assíntota vertical da função* g.

Para calcular possíveis assíntotas horizontais, deve-se tomar os limites: $\lim_{x\to -\infty} g(x)$ *e* $\lim_{x\to +\infty} g(x)$*; Caso algum destes limites resultar em um valor finito* c*, então a reta* $y = c$ *será assíntota horizontal da função* g.

(e) *Refazendo* (a)*, temos:*

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{x^2-4}{x-2} - 1}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{(x+2)(x-2)}{x-2} - 1}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x + 2 - 1}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x - 1}{x - 2}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x - 1}{x - 2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x - 1}{x - 2} = -\infty$$

Como $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$*, não existe derivada em* $x = 2$ *para a nova função.*

Refazendo (b)*, temos:*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} x + 2 = 2 + 2 = 4$$

Temos que $f(2) = 1$*, como* $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$*, então* f *não é contínua em* $x = 2$.

Exercício 9

(a) *Para que a função f seja contínua em 2 é necessário que:* $2 \in \mathrm{Dom}(f)$ *e* $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$*. É possível notar que* $f(2) = 1$ *e calculando os limites:*

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 1 = 1$$

Portanto, f *não é contínua em* $x = 2$.

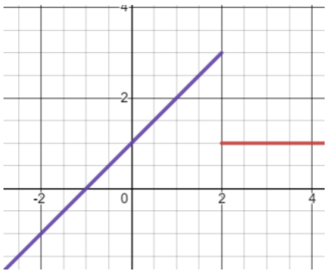
(b)

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1 - 1}{x - 2} = 0$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x + 1) - 1}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x - 2} = -\infty$$

Como não existe $\lim_{x\to 2} f(x)$*, então* f *não é diferenciável em* $x = 2$.

(c) *A partir do gráfico da função, é possível notar que ocorre um "salto"quando* $x = 2$*, indicando a descontinuidade da função nesse ponto. Além disso, para qualquer* $x > 2$*, a função é constante e, desse modo, a derivada nesses pontos é zero. Já para valores de* x *menores que 2, o crescimento da função é não nulo, ou seja sua derivada não é zero. Dessa forma,* f *não é derivável em 2.*



(d) *Para* $a < 2$, *temos*

$$f'(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x + 1 - (a + 1)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} = 1$$

e para $a > 2$, *temos*

$$f'(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{1 - 1}{x - a} = 0.$$

Só não existe derivada para $x = 2$. *Dessa forma, o domínio da função derivada é* $\mathrm{Dom}(f') = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 2\}$.

Exercício 10

(a) *Note que* $4 \in \mathrm{Dom}(f)$ *e temos*

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to^-} -x + 4 = -4 + 4 = 0$$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} x - 4 = 4 - 4 = 0$$

$$f(4) = 4 - 4 = 0$$

Como $\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4^-} f(x) = 0 = f(4)$ *a função é contínua em* $x = 4$.

(b)

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4^+} \frac{x - 4}{x - 4} = \lim_{x \to 4^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4^-} \frac{-x + 4}{x - 4} = \lim_{x \to 4^-} -1\frac{x - 4}{x - 4} = -1 \lim_{x \to 4^-} 1 = -1$$

Como não existe $\lim_{x \to 4} f(x)$, *então* f *não é diferenciável em* $x = 4$.

(c) *A função é contínua, portanto não existem "saltos"em seu gráfico. Entretanto, como é possível observar, em* $x = 4$ *o gráfico possui um "bico", o que indica que não existe derivada nesse ponto, pois não é possível encontrar reta tangente nesse ponto.*

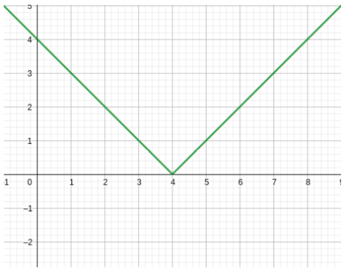
(d) *Para* $x < 4$, $f'(x) = -1$ *e para e para* $x > 4$, $f'(x) = 1$. *Só não existe derivada para* $x = 4$. *Dessa forma, o domínio da função derivada é* $\mathrm{Dom}(f') = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 4\}$.

Exercício 11 (a) *Note primeiramente que* $0 \in \mathrm{Dom}(f)$ *e*

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} -x^2 = 0,$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0,$$

então $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$, *portanto* f *é contínua em* 0.



(b)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}-x=0,$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0^-}x=0.$$

Logo, $\exists \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ *e portanto* f *é derivável em* 0*.*

(c) f *é contínua em* $a\in\mathbb{R}^*$ *pertencente ao domínio da* f*, pois*

$$\lim_{x\to a}f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to a}x^2=a^2=f(a), & se\ a<0\\ \lim_{x\to a}-x^2=-a^2=f(a), & se\ a>0\end{cases}$$

f *é derivável em* $a\in\mathbb{R}^*$ *pertencente ao domínio da* f*, pois*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\begin{cases}\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}=2a, & se\ a<0\\ \lim_{x\to a}\frac{-x^2-(-a^2)}{x-a}=\frac{-(x-a)(x+a)}{x-a}=-2a, & se\ a>0\end{cases}$$

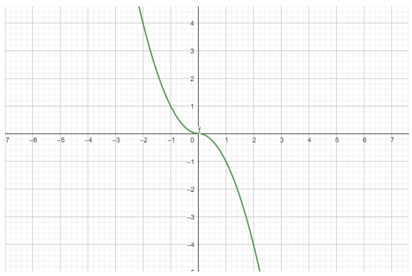
(d) 

Figura 1: $f(x)$

(e) *De acordo com os itens anteriores,*

$$f'(x)=\begin{cases}2x, & se\ x<0\\ -2x, & se\ x\geq 0\end{cases},$$

portanto $\mathrm{Dom}(f')=\mathbb{R}$*.*

Exercício 12 (a) *Seja* $p \in \mathrm{Dom}(f)$ *e assuma que* f *é diferenciável em* p*, ou seja,* $f'(p) = \lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$*. Considere o seguinte limite*

$$\lim_{x\to p} f(x) - f(p) = \lim_{x\to p}(x-p)\frac{f(x)-f(p)}{(x-p)} = \lim_{x\to p}(x-p).\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p} = 0.f'(p) = 0.$$

Então, temos

$$\lim_{x\to p} f(x) - f(p) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to p} f(x) - \lim_{x\to p} f(p) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to p} f(x) - f(p) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to p} f(x) = f(p).$$

Portanto, f *é contínua em* p*.*

(b) *A recíproca não é verdadeira. Tome como contraexemplo a função* $f(x) = |x|$*, as justificativas estão no Exercício 14.*

Exercício 13 (a)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1,$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^-} x = 0.$$

Logo, $\nexists \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ *e portanto* f *não é derivável em* 0*.*

(b)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{0-0}{x-0} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^-} x = 0.$$

Logo, $\exists \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ *e portanto* f *é derivável em* 0*.*

Exercício 14 (a) *Note primeiramente que* $0 \in \mathrm{Dom}(f)$ *e*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}|x| = 0 = f(0),$$

portanto f *é contínua em* 0*.*

(b)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1,$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = -1.$$

Logo, $\nexists \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ *e portanto* f *não é derivável em* 0*.*

(c) f *é contínua em* $a \in \mathbb{R}^*$ *pertencente ao domínio da* f*, pois*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} |x| = |a| = f(a).$$

f *é derivável em* $a \in \mathbb{R}^*$ *pertencente ao domínio da* f*, pois*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to a} \dfrac{|x| - |a|}{x - a} = 1, \ \textit{se } a > 0 \\ \lim\limits_{x \to a} \dfrac{|x| - |a|}{x - a} = -1, \ \textit{se } a < 0 \end{cases}$$

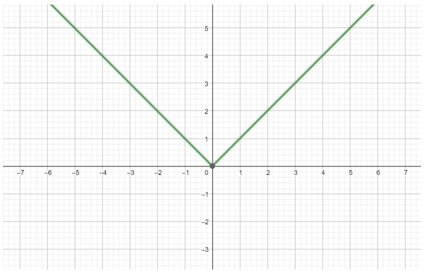
(d) 

Figura 2: $f(x) = |x|$

Exercício 15 (a) *Note primeiramente que* $0 \in \mathrm{Dom}(f)$ *e*

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^{\frac{1}{3}} = \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x} = 0 = f(0),$$

portanto f *é contínua em* 0.

(b) $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{x - a} = \dfrac{1}{3a^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}.$

(c) *Não existe* $f'(0)$*, pois como vimos no item (b),* $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ *e portanto* $0 \notin \mathrm{Dom}(f')$.

Exercício 16 *Temos que a derivada é definida como* $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h}$*, e para que ela exista, ou seja, para que esse limite exista em* $x = 0$*, os limites laterais tem que apresentar os mesmos valores. Assim temos calcular* $\lim\limits_{h \to^+ 0} \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h}$ *e* $\lim\limits_{h \to^- 0} \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h}$*, para* $x = 0$ *e comparar os seus valores.*

Para $\lim\limits_{h \to^+ 0} \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h}$*, temos:*

$$\lim_{h \to^+ 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \lim_{h \to^+ 0} \frac{f(0) - f(0-h)}{h} = \lim_{h \to^+ 0} \frac{f(0) - f(-h)}{h},$$

por $h \to^+ 0$ *fazer com que* $h > 0$*, e que* $-h < 0$

$$\lim_{h \to^+ 0} \frac{1 - (-1)}{h} = \lim_{h \to^+ 0} \frac{2}{h},$$

que é um limite indeterminado que tende a $-\infty$.

Agora para $\lim\limits_{h\to^- 0} \dfrac{f(x)-f(x-h)}{h}$, *temos:*

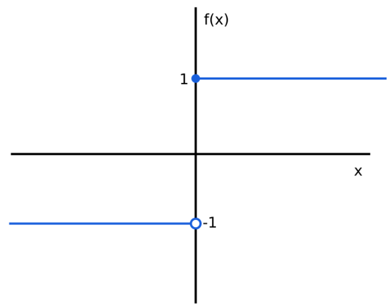
$$\lim_{h\to^- 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} = \lim_{h\to^- 0} \frac{f(0)-f(0-h)}{h} = \lim_{h\to^- 0} \frac{f(0)-f(-h)}{h},$$

por $h \to^- 0$ *fazer com que* $h < 0$, *e que* $-h > 0$

$$\lim_{h\to^- 0} \frac{1-1}{h} = \lim_{h\to^- 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Olhando para os limites laterais notamos que $\lim\limits_{h\to^+ 0} \dfrac{f(x)-f(x-h)}{h} \neq \lim\limits_{h\to^- 0} \dfrac{f(x)-f(x-h)}{h}$. *Portanto, pelos limites laterais, para* $x = 0$, *serem diferentes, temos que o limite* $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x)-f(x-h)}{h}$ *não é determinado, e que portanto a derivada de* $f(x)$ *para esse ponto não pode ser calculada.*

Se fizermos o gráfico da $f(x)$ *podemos notar o seguinte também:*



Por ela não ser continua em $x = 0$, *olhando para um* $x \to 0$ *vindo dos negativos, a* $f(x)$ *tem que dar um salto de variação que tende ao infinito para subir de* -1 *para* 1, *porém, vindo de um* x *dos positivos, a* $f(x)$ *se comporta como uma constante, com uma variação nula. Essa dualidade do valor da derivada que depende da direção em que se escolheu mover o* x *faz com que ela não possa ser verdadeiramente determinada em* $x = 0$.

Exercício 17 *(a) Para achar a derivada de* f *podemos derivar as funções que* $f(x)$ *toma em cada intervalo (pois, como provaremos a seguir,* $f(x)$ *é continua dentro e fora de* $x = 0$*)* $f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & , \text{ se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } x = 0 \end{cases}$.

Para se determinar se f' *é contínua em* $\mathbb{R}$ *temos que observar se, para cada intervalo,* f *é continua. Temos que para* $x \neq 0$, $f(x)$ *se comporta como a função continua* $x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$, *e portanto* f' *é certeiramente contínua em* $\mathbb{R} - \{0\}$. *Agora, para sabermos se* $f(x)$ *é continua em* $x = 0$, *temos que mostrar que* $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. *Temos que* $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$, *por* $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ *ser limitada entre* $[-1, 1]$ *e ela estar multiplicando com* x^2 *que no* $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, *temos que* $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) = 0$. *Assim vemos que* $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, *e que portanto* $f(x)$ *é* *continua em $x = 0$, o que indica que $f'(x)$ também é continua em $x = 0$ e, por ela também ser continua em $\mathbb{R} - \{0\}$, que f' é continua nos $\mathbb{R}$.*

Agora, para determinar o domínio da $f'(x)$ temos que procurar em quais valores de x chegamos em indeterminação em f'. Observasse que, a única função que compõem a $f'(x)$ que pode gerar uma indeterminação é a $2x\,\text{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, pois, se $x = 0$, a fração $\frac{1}{x}$ fica indeterminada, portanto, para ela, $x \neq 0$. Porém, por ela não ser o valor da $f'(x)$ quando $x = 0$, não há nenhum valor que x possa tomar que gera uma indeterminação na $f'(x)$, e portanto o domínio da $f'(x)$ são os $\mathbb{R}$.

(b) *Olhando para essa nova $f(x)$ já se repara que ela não é continua em $x = 0$, pois $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2\,\text{sen}(\frac{1}{x}) = 0 \neq 2 = f(0)$. Porém isso nem sempre quer dizer que a $f'(x)$ em $x = 0$ não existe, mas para isso temos que fazer ela por limite:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0) - f(0-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0) - f(-h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2 - h^2\,\text{sen}(\frac{1}{h})}{0 - h} = \lim_{h\to 0} \frac{2 - h^2\,\text{sen}(\frac{1}{h})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2 - h^2\,\text{sen}(\frac{1}{h})}{h} = -\infty.$$

Assim notamos que a $f'(x)$, quando $x = 0$, agora apresenta uma indeterminação para $-\infty$, causada pela descontinuidade na f, e portanto

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\,\text{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & ,\ se\ x \neq 0 \\ \to -\infty & ,\ se\ x = 0 \end{cases}.$$

Com essa função para $f'(x)$ já reparamos que ela não é continua em todo $\mathbb{R}$, pois $f'(0)$ é um valor indeterminado que tende a $-\infty$, e também que seu domínio é $\mathbb{R} - \{0\}$, por causa da indeterminação em $x = 0$.

Por fim, o que mudou da $f'(x)$ da (a) para a $f'(x)$ da (b) foi a introdução da indeterminação ao $-\infty$ para $x = 0$, causada pela descontinuidade que $f(x)$ passa a ter quando mudasse o valor de $f(x) = 0$ para $f(x) = 2$.

Exercício 18

(a) *Temos que* $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$, *portanto* $f'(x) = 0$.

(b) *Temos que* $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n - (x-h)^n}{h}$, *podemos expandir* $(x-h)^n$ *pelo polinômio de newton dado por* $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + ... + b^n$, $\lim_{h\to 0} \frac{x^n - (x-h)^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n - x^n + nx^{n-1}h + ... + h^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + ... + h^n}{h} = \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + ... + h^{n-1} = \lim_{h\to 0} n(x-h)^{n-1} = nx^{n-1}$, *portanto* $f'(x) = nx^{n-1}$.

(c) *Primeiramente, temos que* $f(x) = y = x^{\frac{1}{n}}$, *ou seja,* $y^n = x$, *assim fazemos a derivada para os dois lados, no lado com o* x *usamos a regra determinada em (b), com* $n = 1$,

$\frac{d}{dx}y^n = 1 \cdot x^{1-1} = 1$, *assim temos que* $\frac{d}{dx}y^n = 1$. *Para derivarmos* y^n, *que depende de* x, *podemos usar uma regra chamada regra da cadeia, que nos permite descrever* $\frac{d}{dx}y^n$ *como* $\frac{d}{dx}y^n = ny^{n-1}\frac{dy}{dx}$, *portanto* $\frac{d}{dx}y^n = ny^{n-1}\frac{dy}{dx} = 1$. *Assim* $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.

(d) *Temos que* $f'(x) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x)-f(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(x-h)}{h}$, *pela relação trigonométrica* $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b)+\cos(a)\operatorname{sen}(b)$ *podemos reescrever*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(x)\cos(-h)-\cos(x)\operatorname{sen}(-h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)(1-\cos(-h))-\cos(x)\operatorname{sen}(-h)}{h},$$

por $\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen}(a)$ *temos*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)(1-\cos(-h))+\cos(x)\operatorname{sen}(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)(1-\cos(-h))}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\operatorname{sen}(h)}{h},$$

$\lim_{h\to 0}\cos(-h) = 1$ *e* $\lim_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)(1-\cos(-h))}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\operatorname{sen}(h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)(1-1)}{h} + \lim_{h\to 0}\cos(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)(0)}{h} + \cos(x) = \cos(x),$$

portanto $f' = \cos(x)$.

(e) *Temos que* $f'(x) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x)-f(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{\cos(x)-\cos(x-h)}{h}$, *pela relação trigonométrica* $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b)-\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$ *podemos reescrever*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)-\cos(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)-\cos(x)\cos(-h)+\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(-h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)(1-\cos(-h))+\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(-h)}{h},$$

por $\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen}(a)$ *temos*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)(1-\cos(-h))-\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)(1-\cos(-h))}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h)}{h},$$

$\lim_{h\to 0}\cos(-h) = 1$ *e* $\lim_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)(1-\cos(-h))}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)(1-1)}{h} - \lim_{h\to 0}\operatorname{sen}(x) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)(0)}{h} - \operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(x),$$

portanto $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$.

(f) Temos que $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x - e^{x-h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x - e^x \cdot e^{-h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(1-e^{-h})}{h}$, *pelo limite* $\lim_{h\to 0} \frac{1-e^{-h}}{h} = 1$, $\lim_{h\to 0} \frac{e^x(1-e^{-h})}{h} = e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1-e^{-h}}{h} = e^x$, *portanto* $f'(x) = e^x$.

(g) Temos que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(\frac{x+h}{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(\frac{x}{x}+\frac{h}{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h},$$

fazendo $h = u \cdot x$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h} = \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+\frac{ux}{x})}{ux} = \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{ux} = \frac{1}{x} \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = \frac{1}{x} \lim_{u\to 0} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}},$$

por $\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$, $\frac{1}{x} \ln\left(\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right) = \frac{1}{x}\ln(e) = \frac{1}{x}$, *portanto* $f'(x) = \frac{1}{x}$.

(h) Temos que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x - a^{x-h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x\cdot\ln(a)} - e^{(x-h)\cdot\ln(a)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x\cdot\ln(a)} - e^{x\cdot\ln(a)} \cdot e^{-h\cdot\ln(a)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x\cdot\ln(a)}(1-e^{-h\cdot\ln(a)})}{h},$$

pelo limite $\lim_{h\to 0} \frac{1-e^{-h\cdot\ln(a)}}{h} = \ln(e^{\cdot\ln(a)}) = \ln(a)$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x\cdot\ln(a)}(1-e^{-h\cdot\ln(a)})}{h} = e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1-e^{-h\cdot\ln(a)}}{h} = e^{x\cdot\ln(a)} \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot a^x,$$

portanto $f'(x) = \ln(a)a^x$.

(i) A regra em que (b) e (c) são resumidas é a regra do produto, a qual não apenas serve para n *ou* $\frac{1}{n}$ *com* $n \in \mathbb{N}$ *mas também para um* $r \in \mathbb{R}$.

(j) Isso ocorre pelas funções para (b) e (h) serem bem diferentes, (b) é um x *elevado a uma constante, enquanto (h) é uma constante elevado a* x *(ou um* $e^{x\cdot C}$, *pois* $a^x = e^{\ln(a)\cdot x}$, *sendo* $C = \ln(a)$*), tanto que a derivada de (b) é* nx^{n-1} *enquanto a de (h) é* $\ln(a)a^x$.

Exercício 19 (a) $f(t)$ *é uma função constante, portanto sabemos que a* $f'(t) = 0$.

(b) $g(x)$ *é uma subtração de uma função constante com uma polinomial, e sabemos que derivada de uma subtração é a subtração de derivadas, portanto* $g'(x) = \frac{d}{dx}17x - 65 = \frac{d}{dx}17x - \frac{d}{dx}65 = 17 - 0 = 17$.

(c) $H(u)$ *é uma razão das funções* $f(u) = 5u+1$ *e* $g(u) = 3\sqrt{u}$, *assim podemos descobrir* $H'(u)$ *pela regra do quociente onde* $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, *portanto* $H'(u) = \frac{\frac{d}{du}(5u+1)\cdot(3\sqrt{u})-(5u+1)\frac{d}{du}(3\sqrt{u})}{(3\sqrt{u})^2} = \frac{(5)\cdot(3\sqrt{u})-(5u+1)(\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{u}})}{9u} = \frac{15\sqrt{u}-\frac{15u}{2\sqrt{u}}-\frac{3}{2\sqrt{u}}}{9u} = \frac{\frac{30u-15u-3}{2\sqrt{u}}}{9u} = \frac{\frac{15u-3}{2\sqrt{u}}}{9u} = \frac{\frac{5u-1}{2\sqrt{u}}}{3u} = \frac{\frac{5-\frac{1}{u}}{2\sqrt{u}}}{3} = \frac{5-\frac{1}{u}}{6\sqrt{u}}$.

(d) *$u(x)$ é a soma das funções $f(x) = x^3$ e $g(x) = 1$, portanto* $\frac{du}{dx} = f'(x) + g'(x) = 3x^2 + 0 = 3x^2$.

(e) *$f(t)$ é a soma das funções $g(t) = t^{1/2}$ e $h(t) = k$, supondo que k é uma constante qualquer,* $f'(t) = g'(t) + h'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 0 = \frac{1}{2\sqrt{t}}$*, senão* $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{dk}{dt}$.

(f) *$g(u)$ é a soma das funções $f(u) = u^{-2}$ e $h(u) = m$, supondo que m é uma constante qualquer,* $g'(u) = f'(u) + h'(u) = -2u^{-3}$*, senão* $g'(u) = f'(u) + h'(u) = -2u^{-3} + \frac{dm}{du}$

(g) *Usando a regra da derivada da soma de funções, a da multiplicação de uma função por uma constante, e conhecendo que* $\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x$ *e* $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$*, temos que* $f'(t) = 2\cos t + \frac{1}{2x}$.

(h) *Conforme as regras anteriores, podemos separar $y(t)$ em duas funções mais simples e fazendo $\frac{1}{t} = t^{-1}$, com a derivada de potências temos que* $\frac{dy}{dt} = 1 + \frac{2}{t^2}$.

(i) *$f(x)$ é a soma das funções $g(x) = x^3$ e uma $F(x)$, portanto* $f'(x) = g'(x) + F'(x) = 3x^2 + F'(x)$.

(j) *Conforme as regras anteriores, podemos separar $h(u)$ em duas funções mais simples, e sabendo que $\frac{d}{du} e^u = e^u$, temos que* $h'(u) = 2F'(u) - 3e^u$.

(k) *Como nas anteriores, podemos separar $f(x)$ em funções mais simples de serem derivadas, e conhecendo que $\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x$, temos que* $f'(x) = 3 \operatorname{sen} x - 30x^{\frac{-5}{2}}$.

(l) *Para encontrar as derivadas segundas das funções podemos utilizar os mesmos truques e as mesmas regras que em todas as anteriores, o que nos permite a chegar nas seguintes funções:*

  (a) *$f'(t)$ é uma função constante, portanto sabemos que a* $f''(t) = 0$.

  (b) *$g'(x)$ é uma função constante, portanto sabemos que a* $g''(t) = 0$.

  (c) $H'(u) = \frac{5 - \frac{1}{u}}{6\sqrt{u}}$*, para encontrar $H''(x)$ podemos usar a regra da razão, o que nos permite chegar a* $H''(x) = \frac{(-- \frac{1}{u^2}) \cdot 6\sqrt{u} - (5 - \frac{1}{u}) \cdot 6 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{u}}}{(6\sqrt{u})^2} = \frac{(+\frac{1}{u^2}) \cdot 6\sqrt{u} - (5 - \frac{1}{u}) \cdot \frac{3}{\sqrt{u}}}{36u} = \frac{\frac{6\sqrt{u}}{u^2} + \frac{3\frac{1}{u} - 15}{\sqrt{u}}}{36u}$.

  (d) $u'(x) = 3x^2$*, portanto* $u''(x) = 6x$.

  (e) *Se* $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$, $f''(t) = -\frac{1}{4} t^{-3/2}$*, mas se* $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{dk}{dt}$, $f''(t) = -\frac{1}{4} t^{-3/2} + \frac{d^2 k}{dt^2}$.

  (f) *Se* $g'(u) = -2u^{-3}$, $g''(u) = 6u^{-4}$*, e se* $g'(u) = -2u^{-3} + \frac{dm}{du}$, $g''(u) = 6u^{-4} + \frac{d^2 m}{du^2}$.

  (g) $f'(t) = 2\cos t + \frac{1}{2x}$*, portanto, após separar e derivar cada função dentro dela,* $f''(t) = -2 \operatorname{sen} t - \frac{1}{2} x^{-2}$.

  (h) $\frac{dy}{dt} = 1 + \frac{2}{t^2}$*, portanto* $\frac{d^2 y}{dt^2} = -4t^{-3}$.

  (i) $f'(x) 3x^2 + F'(x)$*, portanto* $f''(x) = 6x + F''(x)$.

  (j) $h'(u) = 2F'(u) - 3e^u$*, portanto* $h''(u) = 2F''(u) - 3e^u$.

  (k) $f'(x) = 3 \operatorname{sen} x - 30x^{\frac{-5}{2}}$*, portanto* $f''(x) = 3\cos x + 45x^{\frac{-7}{2}}$.

(m) *Em (i) descobrimos que* $f'(x)3x^2 + F'(x)$, *portanto,* $f'(2) = 3(2)^2 + F'(2) = 12 + F'(2)$, *pela questão dizer que* $F'(2) = 5$, *concluímos que* $f'(2) = 12 + F'(2) = 17$.

(n) *Se* g *for função diferenciável em* x *então: caso* u *seja constante em relação a* x *temos* $f'(x) = g'(x) + \cos(x)$; *ou caso* u *seja uma função de* x *temos* $f'(x) = g'(x) + \cos(x) + u'(x)$.

Exercício 20 (a) $f(u) = \frac{6}{u^2} = 6u^{-2}$, *portanto, pela "regra do tombo",* $f'(u) = 6(-2)u^{-2-1} = -12u^{-3} = \frac{-12}{u^3}$.

(b) $f(u) = \frac{6}{u^2}$, *portanto, pela regra do quociente,* $f'(u) = \frac{\frac{d}{du}6u^2 - 2u6}{u^4} = \frac{-12u}{u^4} = \frac{-12}{u^3}$.

(c) *Ambos os métodos coincidem.*

(d) $f(x) = 3^x = e^{\ln 3 \cdot x}$, *portanto, pela regra da cadeia,* $f'(x) = 3^x \ln(3)$. $g(x) = x^3$, *portanto, pela "regra do tombo",* $g'(x) = 3x^2$. *Dessas derivadas se conclui que, por mais que envolvam expoentes e os valores de* x *e* 3, *elas não apenas usam regras de derivação diferentes como tem derivadas distintas.*

Exercício 21 (a) *O limite da velocidade média de* fg *é* $\lim_{h\to 0} \frac{f(x)g(x) - f(x-h)g(x-h)}{h}$, *que é igual a* $\frac{d}{dx}fg(x)$. *Manipulando esse limite temos que*

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x)g(x) - f(x-h)g(x-h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x)g(x) - f(x-h)g(x-h) + \boxed{(f(x-h)g(x) - f(x-h)g(x))}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)(f(x) - f(x-h)) + f(x-h)(g(x) - g(x-h))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{g(x)(f(x) - f(x-h))}{h} + \frac{f(x-h)(g(x) - g(x-h))}{h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)(f(x) - f(x-h))}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)(g(x) - g(x-h))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} g(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x-h) \lim_{h\to 0} \frac{g(x) - g(x-h)}{h} \\
&= g(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x) - g(x-h)}{h} \\
&= \boxed{g(x)\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x)}.
\end{aligned}$$

Portanto, para $f(x)$ *e* $g(x)$ *deriváveis em* x, *temos que*

$$\frac{d}{dx}fg(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)g(x) - f(x-h)g(x-h)}{h} = g(x)\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x),$$

o que é diferente de $f'(x)g'(x) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$.

(b) *Com regra do produto sendo* $\frac{d}{dx}fg(x) = g(x)\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x)$*, podemos fazer* $f'(x) = \frac{d}{dx}Fg(x) = F'(x)g(x) + F(x)g'(x)$*, por* $F(x) = f/g$ *temos* $f'(x) = F'(x)g(x) + F(x)g'(x) = F'(x)g(x) + \frac{f(x)}{g(x)}g'(x)$*, isolando o* $F'(x)$ $f'(x) = F'(x)g(x) + \frac{f(x)}{g(x)}g'(x)) \to f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)}g'(x) = F'(x)g(x) \to \frac{f'(x)-\frac{f(x)}{g(x)}g'(x)}{g(x)} = F'(x) \to \frac{\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)}}{g(x)} = F'(x) \to$ $\boxed{\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} = F'(x)}$

(c) *Temos como* $f(x) = \frac{1}{x^n}$*, usando a regra do quociente, temos que* $f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}1\cdot x^n - 1\cdot\frac{d}{dx}x^n}{(x^n)^2} = \frac{0\cdot x^n - n\cdot x^(n-1)}{x^{2n}} = \frac{-n\cdot x^(n-1)}{x^{2n}} = -nx^{n-1-2n} = \boxed{-nx^{-n-1}}$ *, o que demontra que a mesma regra do 'tombamento' funciona para expoentes negativos.*

(d) *Temos como* $f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$*, usando a regra do quociente, temos que* $f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}\ln x\cdot\ln a - \ln x\cdot\frac{d}{dx}\ln a}{(\ln a)^2} = \frac{\frac{1}{x}\ln a - \ln x\cdot 0}{(\ln a)^2} = \frac{\frac{1}{x}\ln a}{(\ln a)^2} = \boxed{\frac{1}{x\cdot\ln a}}$.

Exercício 22 (a) *Pela regra do produto temos,* $f'(x) = \frac{d}{dx}(2\cos(x) + \operatorname{sen}(x)(x^2 + \log_5(x) + 2x) + (2\cos(x) + \operatorname{sen}(x)\frac{d}{dx}(x^2 + \log_5(x) + 2x) =$ $\boxed{(-2\operatorname{sen}(x) + \cos(x)(x^2 + \log_5(x) + 2x) + (2\cos(x) + \operatorname{sen}(x)(2x + \frac{1}{x\ln 5} + 2)}$.

(b) *Temos* $f(x) = \operatorname{senhx}\cdot\tan x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$*, pela regra do produto temos* $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\cdot\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} + \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\frac{d}{dx}\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} + \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\cos x\cdot\cos x - \operatorname{sen}x\cdot - \operatorname{sen}x}{\cos^2 x}\right) \to \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \to f'(x) = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} + \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\cdot\sec^2 x = \boxed{\cosh x\tan x + \operatorname{senhx}\sec^2 x}$.

(c) *Temos* $f(x) = \operatorname{sen}x\ln x(e^x+1) = \operatorname{sen}x(\ln x(e^x+1))$*, usando a regra do produto temos* $f'(x) = \frac{d}{dx}\operatorname{sen}x(\ln x(e^x+1)) + \operatorname{sen}x\frac{d}{dx}(\ln x(e^x+1)) =$ $\boxed{\cos x(\ln x(e^x+1)) + \operatorname{sen}x\left(\frac{1}{x}(e^x+1) + \ln x\cdot e^x\right)}$.

(d) *Usando a regra do quociente temos* $f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}x+1)(\ln x+2^x+2^3+k) - (\operatorname{sen}x+1)\frac{d}{dx}(\ln x+2^x+2^3+k)}{(\ln x+2^x+2^3+k)^2} =$ $\boxed{\frac{\cos x(\ln x + 2^x + 2^3 + k) - (\operatorname{sen}x + 1)(\frac{1}{x} + \ln 2\cdot 2^x)}{(\ln x + 2^x + 2^3 + k)^2}}$.

(e) *Usando a regra do quociente temos* $f'(x) = -\frac{\frac{d}{dx}(2\cos x)(x^2+\frac{1}{2}x+1) - (2\cos x)\frac{d}{dx}(x^2+\frac{1}{2}x+1)}{(x^2+\frac{1}{2}x+1)^2} = -\frac{-2\operatorname{sen}x(x^2+\frac{1}{2}x+1) - 2\cos x(2x+\frac{1}{2})}{(x^2+\frac{1}{2}x+1)^2} =$ $\boxed{\frac{2\operatorname{sen}x(x^2+\frac{1}{2}x+1) + 2\cos x(2x+\frac{1}{2})}{(x^2+\frac{1}{2}x+1)^2}}$.

(f) *Usando a regra do quociente temos* $f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}((x^3+7)\cos x)(x^2(\operatorname{sen}x+1)) - ((x^3+7)\cos x)\frac{d}{dx}(x^2(\operatorname{sen}x+1))}{(x^2(\operatorname{sen}x+1))^2} =$

$$\boxed{\frac{((3x^2)\cos x + (x^3+7)\cdot - \operatorname{sen} x)(x^2(\operatorname{sen} x + 1)) - ((x^3+7)\cos x)(2x(\operatorname{sen} x+1) + x^2(\cos x))}{(x^2(\operatorname{sen} x + 1))^2}}.$$

Exercício 23 *Para* senhx *temos* $\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) = \cosh x$, *e para* $\cosh x$ *temos* $\frac{d}{dx}\cos x = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right) = \operatorname{senh} x$.

Exercício 24 (a) $f'(x) = \frac{d}{dx}\cos^6(x) = 6(\cos(x))^5 \cdot \frac{d}{dx}\cos = 6\cos^5(x) \cdot -\sin(x) = -6\cos^5(x)\sin(x)$.

(b) $f'(v) = \frac{d}{dv}(17v-5)^1000 = 1000(17v-5)^{999} \cdot \frac{d}{dv}(17v-5) = 1000(17v-5)^{999} \cdot 17 = 17000(17v-5)^{999}$.

(c) $f'(z) = \frac{d}{dz}(1+\sqrt{z})^2 = 2(1+\sqrt{z}) \cdot \frac{d}{dz}(1+\sqrt{z}) = (1+\sqrt{z}) \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1+\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$.

(d) $f'(t) = \frac{d}{dt}[(1+\frac{1}{t})^{-1}+1]^{-1} = -1 \cdot ((1+\frac{1}{t})^{-1}+1)^{-2} \cdot \frac{d}{dt}((1+\frac{1}{t})^{-1}+1) = -((1+\frac{1}{t})^{-1}+1)^{-2} \cdot (-(1+\frac{1}{t})^{-2} \cdot (-\cdot t^{-2}) + 0) = -(\frac{t}{t+1}+1)^{-2} \cdot (-(\frac{t}{t+1})^2 \cdot (-\cdot t^{-2})) = -(\frac{2t+1}{t+1})^{-2} \cdot -(\frac{t}{t+1})^2 \cdot (-\cdot t^{-2}) = -(\frac{t+1}{2t+1})^2 \cdot -(\frac{t}{t+1})^2 \cdot (-\cdot t^{-2}) = -\frac{(t+1)^2}{(2t+1)^2} \cdot -\frac{t^2}{(t+1)^2} \cdot -\frac{1}{t^2} = -\frac{1}{(2t+1)^2}$.

(e) $f'(x) = \frac{d}{dx}\operatorname{sen}(9x+4) = \cos(9x+4) \cdot \frac{d}{dx}(9x+4) == 9\cos(9x+4)$.

(f) $f'(x) = \frac{d}{dx}\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{-1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$.

(g) $f'(x) = \frac{d}{dx}\operatorname{sen}((2x+3)^4) = \cos((2x+3)^4)\frac{d}{dx}(2x+3)^4 = 8(2x+3)^3\cos((2x+3)^4)$.

(h) $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) + \sqrt{\operatorname{sen}(x)}\right) = \cos\left(\sqrt{x}\right) \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}(x)}} \cdot \frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x) = \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}} + \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$.

(i) $\frac{d}{dx}y = 3\left(\frac{x^2+x}{\operatorname{sen} x + x^3}\right)^2 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+x}{\operatorname{sen} x + x^3}\right) = 3\left(\frac{x^2+x}{\operatorname{sen} x + x^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{(2x+1)(\operatorname{sen} x + x^3) + (x^2+x)(\cos x + 3x^2)}{(\operatorname{sen} x + x^3)^2}\right)$.

(j) $\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} x + x + 1 + x^3}}\right) = \frac{d}{dx}\left(sen x + x + 1 + x^3\right)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}(sen x + x + 1 + x^3)^{-\frac{4}{3}} \cdot \frac{d}{dx}(sen x + x + 1 + x^3) = -\frac{1}{3}(sen x + x + 1 + x^3)^{-\frac{4}{3}} \cdot (\cos x + 1 + 0 + 3x^2) = -\frac{1}{3}(sen x + x + 1 + x^3)^{-\frac{4}{3}} \cdot (\cos x + 3x^2 + 1)$.

(k) $\frac{d}{dx}y = \cos(\tan(e^x)) \cdot \frac{d}{dx}\tan(e^x) = \cos(\tan(e^x)) \cdot \sec^2(e^x) \cdot \frac{d}{dx}e^x = \cos(\tan(e^x)) \cdot \sec^2(e^x) \cdot e^x$.

(l) $h'(x) = f'(2x) \cdot \frac{d}{dx}2x + \cos(g(x)) \cdot \frac{d}{dx}g(x) = f'(2x) \cdot 2 + \cos(g(x)) \cdot g'(x)$.

Exercício 25 *Para conhecer se é possível diferenciar* $f(x)$ *para* $x \neq 2$ *podemos verificar que* $f(x)$ *é continuo para esses valores, o que é verdade pelas funções* $x\operatorname{sen}(\pi x)$, *para* $x \in (-\infty, 2]$, *e* $(x^2+1)\cos(\pi x)$, *para* $x \in (2, +\infty)$, *serem continuas dentro dos seus domínios.*

Agora para saber se $f(x)$ *é diferenciável em* $x = 2$ *o* $\lim_{x\to 2}\frac{f(2)-f(x)}{x-2}$ *tem que existir e para ele existir* $\lim_{x\to^- 2}\frac{f(2)-f(x)}{x-2} = \lim_{x\to^+ 2}\frac{f(2)-f(x)}{x-2}$. *O* $\lim_{x\to^- 2}\frac{f(2)-f(x)}{x-2}$ *é o limite para* $x < 2$, *e portanto* $\lim_{x\to^- 2}\frac{f(2)-f(x)}{x-2} = \frac{d}{dx}x\operatorname{sen}(\pi x) = sen(\pi x) + x\cos(\pi x) \cdot \pi$, *fazendo* $x = 2$, $\lim_{x\to^- 2}\frac{f(2)-f(x)}{x-2} = 2\pi$. *Já o* $\lim_{x\to^+ 2}\frac{f(2)-f(x)}{x-2}$ *é o limite para* $x > 2$, *e assim* $\lim_{x\to^+ 2}\frac{f(2)-f(x)}{x-2} =$

$\frac{d}{dx}(x^2+1)\cos(\pi x) = (2x)\cos(\pi x) + (x^2+1)\,\mathrm{sen}(\pi x)\pi$, *fazendo* $x = 2$, $\lim_{x\to^+2} \frac{f(2)-f(x)}{x-2} = 4$. *Com isso podemos conferir que os limites laterais não tem valores iguais, e que portanto* $f(x)$ *não é diferenciável em* $x = 2$.

Exercício 26 (a) $\frac{\mathrm{sen}(2x)}{3+\mathrm{sen}^2(x)}$

(b) $\frac{e^{x^3}\left(3x^2\left(x^2+1\right)-2x\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$

(c) $\frac{1-\mathrm{sen}(x)}{x+\cos(x)}$

(d) $\frac{\left(e^{3x}+7\right)^2\left(x\left(2x^2+3\right)(3x+5)^6+18x^2(3x+5)^5\left(x^2+3\right)\right)-2e^{3x}x^2\left(e^{3x}+7\right)(3x+5)^6\left(x^2+3\right)}{(x^2)^{\frac{1}{2}}\left((e^{3x}+7)^2\right)^{\frac{4}{3}}(x^2+3)^{\frac{1}{2}}}$

(e) $\frac{5}{x\ln(2)}$

(f) $-\frac{12\ln(a)}{(a^{3x}-a^{-3x})^2}$

(g) $\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+3)}$

(h) $\frac{e^{5x-2}\left(5e^{5x-2}-5e^{-5x+2}\right)}{e^{10x-4}+1}$

(i) $\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$

Exercício 27 (a) $\frac{1}{4\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\sqrt{x+1}}$

(b) $2xe^{x^2}$

(c) $2e^{2x}\ln\left(x\,\mathrm{sen}\,(x) + \frac{e^{-x}}{x^5+1}\right) + \frac{e^{2x}\left(\mathrm{sen}(x)\left(x^5+1\right)^2+x\cos(x)\left(x^5+1\right)^2-e^{-x}\left(x^5+1\right)-5e^{-x}x^4\right)}{(x^5+1)(x\,\mathrm{sen}(x)(x^5+1)+e^{-x})}$

(d) $\frac{e^{x^3}\left(3x^2\left(x^2+1\right)-2x\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$

Exercício 28 *a) Denotemos* $F(x) = (f(x) - \mathrm{sen}(x))^2 + (g(x) - \cos(x))^2$, $x \in \mathbb{R}$. *Logo, observamos que*

$$\begin{aligned} F(x) &= (f(x))^2 + (g(x))^2 - 2f(x)\,\mathrm{sen}(x) - 2g(x)\cos(x) + \mathrm{sen}^2(x) + \cos^2(x) \\ &= (f(x))^2 + (g(x))^2 - 2f(x)\,\mathrm{sen}(x) - 2g(x)\cos(x) + 1. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) - 2\left(f'(x)\,\mathrm{sen}(x) + f(x)\cos(x)\right) - 2\left(g'(x)\cos(x) - g(x)\,\mathrm{sen}(x)\right) \\ &= 2f(x)g(x) - 2f(x)g(x) - 2(\,\mathrm{sen}(x)g(x) + f(x)\cos(x)) - 2(-f(x)\cos(x) - g(x)\,\mathrm{sen}(x)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde $x \in \mathbb{R}$. *Mas lembre-se que decorre do Teorema do Valor Médio que se uma função tem derivada nula em* $\mathbb{R}$, *então ela é constante em* $\mathbb{R}$ *(deve ter visto isto nas aulas,* *caso contrário não é difícil provar). Portanto,* F *é constante, isto é,* $F(x) = C$, $x \in \mathbb{R}$ *com* C *sendo uma constante real. Mas como* $f(0) = 0$ *e* $g(0) = 1$, *logo*

$$C = F(0) = 0 + (1-1)^2 = 0.$$

Portanto, $F(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, *isto é,* $(f(x) - \operatorname{sen}(x))^2 + (g(x) - \cos(x))^2 = 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.
b) Do item a), vamos ter que $(f(x) - \operatorname{sen}(x))^2 = -(g(x) - \cos(x))^2$, *para* $x \in \mathbb{R}$. *Mas isto por propriedade dos números reais só pode acontecer se somente se* $(f(x) - \operatorname{sen}(x))^2 = 0$ *e* $(g(x) - \cos(x))^2 = 0$. *Assim,* $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ *e* $g(x) = \cos(x)$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 29 (a) $\frac{\sec^2\left(\sec\left(x\sqrt{x^2+\sqrt{x}}+1\right)\right)\sec\left(x\sqrt{x^2+\sqrt{x}}+1\right)\tan\left(x\sqrt{x^2+\sqrt{x}}+1\right)\left(8x^2+5\sqrt{x}\right)}{4\sqrt{x^2+\sqrt{x}}}$

(b) $\frac{-2x\operatorname{cotg}(x^2+4)}{\operatorname{sen}(x^2+4)}$

(c) $\frac{\sec\left(\sqrt{x-1}\right)\tan\left(\sqrt{x-1}\right)}{2\sqrt{x-1}}$

(d) $2\sec^5(x)\tan(x) + 3\sec^3(x)\tan^3(x)$

(e) $\frac{\left(3x^2\sec(x)\tan(x)+\left(-\sec(x)+2\sec^3(x)\right)x^3\right)\left(x^2+1\right)\cos(x)-\left(2x\cos(x)-\operatorname{sen}(x)\left(x^2+1\right)\right)x^3\sec(x)\tan(x)}{\left((x^2+1)\cos(x)\right)^2}$

(f) $-3\csc^2(x)\operatorname{cotg}^2(x)$

(g) $\cosh^2(x) + \operatorname{senh}^2(x)$

(h) $\frac{3e^{3x}}{e^{6x}+1}$

(i) $\frac{2e^{\sec\left(x^2\right)}x^2\sec\left(x^2\right)\tan\left(x^2\right)-e^{\sec\left(x^2\right)}}{x^2}$

(j) $\frac{1}{\arctan(-2x+1)(2x^2-2x+1)}$

(k) $3\ln(2)\cdot 8^x \operatorname{arcsen}(4x) + \frac{2^{2+3x}}{\sqrt{1-16x^2}}$

(l) $\frac{\log_{10}(x)-1}{x} + \frac{\ln(2x)}{x\ln(10)}$

(m) $-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x\ln(2)} - \frac{1-\ln(x)}{x^2\ln(2)}$

(n) $\frac{6}{72x^2-84x+25}$

(o) $-\frac{\sqrt{x^2}}{x^2\sqrt{-8x^2-6x-1}}$

(p) $-\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}}$

Exercício 30 *Aplicando a regra da cadeia, concluímos*

$$\frac{dx}{dt} = -\omega\operatorname{sen}(\omega t), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2\cos(\omega t),$$

assim,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = -\omega^2\cos(\omega t) + \omega^2\cos(\omega t) = 0.$$

Exercício 31 *Como* $g'(x)$ *existe, derivamos dos dois lado de* $f(g(x)) = x$ *e aplicamos a regra da cadeia, logo* $f(g(x))' = f'(g(x))g'(x) = 1$. *Dessa forma,* $\frac{1}{g(x)}g'(x) = 1$ *o que implica* $g(x) = g'(x)$.

Exercício 32 *(a) Como* $(x^2-1)^3 = X^6 - 3x^4 + 3x^2 + 1$ *as derivadas não nulas são* $f(x) = (x^2-1)^3$, $f'(x) = 6x^5 - 12x^3 + 6x$, $f''(x) = 30x^4 - 36x^2 + 6$, $f'''(x) = 120x^3 - 72x$, $f^{(4)}(x) = 360x^2 - 72$, $f^{(5)}(x) = 720x$, $f^{(6)}(x) = 720$.

(b) $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$. *Portanto,* $f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$.

(c) Derivando uma vez, $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 12x + 7$, *novamente* $f''(x) = 12x^2 - 6x - 12$. *Assim,* $f''(2) = 48 - 24 = 24$ *é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de* f' *no ponto* $(2,3)$. *Logo,* $3 = 24 \cdot (2) + b$ *o que implica* $b = -45$. *Portanto, a reta tangente é* $y = 24x - 45$.

(d) Basta aplicar a regra da cadeia. $D_x^2 y = f''(g(x))g'(x)^2 + f'(g(x))g''(x)$

Exercício 33 (a) *Como* $f(x) > 0$, *então* $\ln(f(x)) = \cos(x^2) \cdot \ln(e^{2x} + 7)$, *logo* $f(x) = e^{\cos(x^2)\cdot\ln(e^{2x}+7)}$. *Daí,* $f'(x) = e^{\cos(x^2)\cdot\ln(e^{2x}+7)} \cdot [\cos(x^2) \cdot \ln(e^{2x} + 7)]' = (e^{2x} + 7)^c os(x^2) \cdot [\cos(x^2) \cdot \ln(e^{2x} + 7)]'$. *Portanto,*

$$f'(x) = \left(-2x\sin\left(x^2\right)\ln\left(e^{2x}+7\right) + \frac{2e^{2x}\cos\left(x^2\right)}{e^{2x}+7}\right)\left(e^{2x}+7\right)^{\cos\left(x^2\right)}.$$

(b) *Novamente* $f(x) > 0$. *Assim,* $\ln(f(x)) = \ln(x^2 e^{\sqrt{2x}}) = 2\ln(x) + \sqrt{2x}$. *Derivando ambos os lados, obtemos* $\frac{1}{f(x)}f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}$. *Logo,*

$f'(x) = f(x) \cdot \left(\frac{2}{x} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2x}}\right) = 2xe^{\sqrt{2x}} + \frac{e^{\sqrt{2x}}\sqrt{x^3}}{\sqrt{2}}$

(c) *Raciocínio análogo* $x^{x^{x^x}}\left(x^{x^x}\ln(x)\left(x^x\ln(x)(\ln(x)+1) + x^{x-1}\right) + x^{x^x-1}\right)$.

Exercício 34 (a) $\frac{d}{dx}\cos^2(x+y) = 0$, *logo* $-2\cos(x+y)\mathrm{sen}(x+y)(1 + \frac{dy}{dx}) = 0$, *logo* $\frac{dy}{dx} = -1$, *assim como* $\frac{dx}{dy} = -1$.

(b) *De um lado,* $\frac{d}{dx}y^3 = 3y^2\frac{dy}{dx}$. *Por outro lado,* $\frac{d}{dx}\left(\frac{x-y}{x+y}\right) = \frac{(1-\frac{dy}{dx})(x+y) - (1+\frac{dy}{dx})(x-y)}{(x+y)^2}$.

Logo, $3y^2\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 2x\frac{dy}{dx}}{(x+y)^2}$. *Isolando,* $\frac{dy}{dx}$ *temos*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{3y^2(y+x)^2 + 2x}.$$

Analogamente,

$$\frac{dx}{dy} = 3y^2 + \frac{2x}{(x+y)^2}.$$

(c) *Primeiramente,* $\frac{d}{dx}(y^2-9)^4 = 8y(y^2-9)^3\frac{dy}{dx}$. *Por outro lado,* $\frac{d}{dx}(4x^2+3x+1)^2 = 2(4x^2+3x+1)(8x+3)$. *Assim,* $8y(y^2-9)^3\frac{dy}{dx} = 2(4x^2+3x+1)(8x+3)$. *Isolando* $\frac{dy}{dx}$, *obtemos*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4x^2+3x+1)(8x+3)}{4y(y^2-9)^3}.$$

Agora,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{8y(y^2-9)^3}{64x^3+72x^2+10x-3}.$$

(d) *Derivando em relação* x, *temos* $3x^2+2xy+x^2\frac{dy}{dx}-2y^2-2xy\frac{dy}{dx}+3y^2\frac{dy}{dx}$. *Isolando,* $\frac{dy}{dx}$ *temos*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2-2xy+2y^2}{x^2-4xy+3y^2}.$$

Analogamente,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-x^2+4xy-3y^2}{3x^2+2x-2y^2}.$$

(e) *Derivando em relação a* x *temos,* $\cos(xy)\frac{d}{dx}(xy)+\frac{dy}{dx}-2x=0$. *Assim,* $\cos(xy)\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)+\frac{dy}{dx}-2x=0$. *Isolando,* $\frac{dy}{dx}$ *temos*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y\cos(xy)}{x\cos(xy)+1}.$$

Analogamente,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x\cos(xy)-1}{y\cos(xy)-2x}.$$

(f) *Derivando em relação a* x, *temos* $y+x\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$. *Analogamente,* $\frac{dx}{dy} = \frac{-x}{y}$.

(g) *Obtemos,* $\operatorname{arctg}(x)+\frac{x}{x^2+1}+2y\frac{dy}{dx}=0$, *logo*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x-\arctan(x)\left(x^2+1\right)}{2y\left(x^2+1\right)}.$$

(h) *Derivando em relação a* x *temos,* $\dfrac{1}{\sqrt{2x+y}}+\dfrac{1}{2\sqrt{2x+y}}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+2y}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+2y}}\dfrac{dy}{dx}=0$. *Logo,*

$\dfrac{dy}{dx}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2y}}\right)=\dfrac{-2}{\sqrt{2x+y}}-\dfrac{-1}{\sqrt{x+2y}}$. *Isolando* $\dfrac{dy}{dx}$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{-2}{\sqrt{2x+y}}+\dfrac{-1}{\sqrt{x+2y}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2y}}}.$$

(i) *Temos,* $\cosh(x^2y)\dfrac{d}{dx}(x^2y)+\operatorname{senh}(y^2-\cos(xy))\dfrac{d}{dx}(y^2-\cos(xy))=0$. *Fazendo as contas,*

$\cosh(x^2y)(2xy+x^2\dfrac{dy}{dx})+\operatorname{senh}(y^2-\cos(xy))(2y\dfrac{dy}{dx}+y\operatorname{sen}(xy)+x\operatorname{sen}(xy)\dfrac{dy}{dx})=0$

$\dfrac{dy}{dx}(x^2\cosh(x^2y)+2y\operatorname{senh}(y^2-\cos(xy))+\operatorname{senh}(y^2-\cos(xy)x\operatorname{sen}(xy)))=-2xy\cosh(x^2y)-y\operatorname{sen}(xy)\operatorname{senh}(y^2-\cos(xy))$. *Portanto,*

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2yx\cosh\left(yx^2\right)+y\operatorname{sen}(yx)\operatorname{senh}\left(y^2-\cos(yx)\right)}{x^2\cosh(yx^2)+2y\operatorname{senh}(y^2-\cos(yx))+x\operatorname{sen}(yx)\operatorname{sen}(y^2-\cos(yx))}.$$

Exercício 35 *Isolando* y *da expressão* $4x^2+9y^2=40$, *temos* $y=\dfrac{\pm\sqrt{40-4x^2}}{3}$. *Logo,* $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{8x}{6\sqrt{40-4x^2}}=\pm\dfrac{2x}{3\sqrt{10-x^2}}$. *Queremos, pontos da elipse no qual a reta tangente tenha coeficiente angular* $\dfrac{-2}{9}$. *Logo,*

$\pm\dfrac{2x}{3\sqrt{10-x^2}}=\dfrac{-2}{9}$, *o que implica,* $\pm\dfrac{x}{\sqrt{10-x^2}}=\dfrac{-1}{3}$. *Elevando ao quadrado e multiplicando em cruz temos,*

$9x^2=10-x^2$, *dessa forma* $10x^2=10$ *então* $x=\pm1$. *Os valores de* $y=\pm2$. *Como queremos, retas tangentes e com mesmo coeficiente angular, elas são paralelas. Os pontos em questão devem ser simétricos em relação a origem do plano (centro da elipse), logo* $(1,2)$ *e* $(-1,-2)$. *Basta, substituir na equação da reta* $y=-\dfrac{2}{9}x+b$ *em ambos os pontos, obtendo assim*

$2+\dfrac{2}{9}=b_0$, *ou seja,* $b_0=\dfrac{20}{9}$, *uma reta é* $y_1=-\dfrac{2}{9}+\dfrac{20}{9}$. *Para a outra reta,*

$-2=\dfrac{2}{9}+b_1$, *então* $b_1=-\dfrac{20}{9}$. *Portanto, as retas tangentes são* $y=\dfrac{-2}{9}x\pm\dfrac{20}{9}$.

Exercício 36 *Considerando as variáveis* $x=x(t)$ *e* $y=t(t)$ *como funções de* t *e utilizando a regra da cadeia para derivar a equação* $x^2+4y^2=1$ *em relação a variável* t, *teremos*

$$\frac{d(x^2+4y^2)}{dt}=\frac{d}{dt}1 \implies 2\cdot x\cdot\frac{dx}{dt}+4\cdot2\cdot y\cdot\frac{dy}{dt}=0$$

Substituindo $\frac{dx}{dt} = \text{sen}(4t)$ *na equação a cima, teremos,*

$$2x\,\text{sen}(4t) + 8y\frac{dy}{dt} = 0 \implies \frac{dy}{dt} = \frac{-x\,\text{sen}(4t)}{4y}$$

Exercício 37 *Aplicando a regra da cadeia à função* $f(f^{-1}(x)) = x$*, teremos*

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))' = 1 \implies (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Exercício 38 *a) Derivando implicitamente a seguinte identidade trigonométrica*

$$\text{sen}(\cos^{-1}(x)) = \sqrt{1-x^2},$$

teremos

$$\cos(\cos^{-1}(x)) \cdot (\cos^{-1}(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \implies (\cos^{-1}(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

O domínio da função é o intervalo aberto $(-1, 1)$*.*

b) Considerando a função $\cos(x)$*, pelo exercicio 37, teremos*

$$(\cos^{-1})'(x) = \frac{1}{\cos\prime(\cos^{-1}(x))}.$$

Sendo $\cos\prime(x) = -\text{sen}(x)$ *e utilizando a igualdade trigonometrica* $\text{sen}(\cos^{-1}(x)) = \sqrt{1-x^2}$*, teremos*

$$(\cos^{-1})'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercício 39 *Derivando* $x^3 f(x)^2 + \cos(\sqrt{(}f(x))) = x$ *implicitamente teremos*

$$2x^3 f(x)f'(x) - \frac{f\prime(x)\sin(\sqrt{f(x)})}{2\sqrt{f(x)}} + 3x^2 f(x)^2 = 1.$$

Isolando $f'(x)$*, teremos*

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{f(x)} - 6x^2 f(x)^{\frac{5}{2}}}{4x^3 f(x)^{\frac{3}{2}} - \text{sen}(\sqrt{f(x)})}.$$

Exercício 40 *Temos que calcular*

$$\lim_{y \to q} \frac{g(y) - g(q)}{y - q}.$$

Como f *é bijetora, então existem únicos* x, p *tais que* $f(x) = y$ *e* $f(p) = q$*, ou seja,* $g(y) = x$ *e* $g(q) = p$*. Note ainda que* f *é contínua, então quando* $y \to q$*, vem* $x \to p$ *(pois se* $x \to p'$*, temos* $y = f(x) \to f(p')$*, logo,* $f(p') = q = f(p)$*, portanto,* $p = p'$*).*

Ainda, como estamos assumindo $y \neq q$ *para o cálculo do limite, temos* $x \neq p$. *Portanto, fazendo a mudança* $x = g(y)$, *obtemos*

$$\lim_{y \to q} \frac{g(y) - g(q)}{y - q} = \lim_{x \to p} \frac{x - p}{f(x) - f(p)} = \lim_{x \to p} \frac{1}{\frac{f(x)-f(p)}{x-p}} = \frac{1}{f'(p)} = \frac{1}{f'(g(q))}.$$

Portanto, g *é diferenciável e*

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1 + e^{g(x)}}.$$

Em particular, como $f(0) = 1$, *então* $g(1) = 0$, *logo,*

$$g'(1) = \frac{1}{1 + e^{g(1)}} = \frac{1}{1 + e^0} = 1.$$

Diferenciando a expreção encontrada para g' *temos que*

$$g''(x) = -\frac{g'(x)e^{g(x)}}{(1 + e^{g(x)})^2},$$

então

$$g''(1) = -\frac{g'(1)e^{g(1)}}{(1 + e^{g(1)})^2} = -\frac{1 \cdot e^0}{(1 + e^0)^2} = -\frac{1}{4}.$$

Exercício 41 *(a) Vamos mostrar que a função adimite uma inversa provando que ela é bijetora, isto é injetora e sobrejetora. Para a injetividade, note que a função é estritamente crecente. De fato,*

$$\frac{d(x + x^3)}{dx} = 3x^2 + 1$$

Como $3x^2 + 1 > 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *temos que a função é estritamente crecente.*

Para a sobrejetividade, vamos calcular os seguintes limites

$$\lim_{x \to -\infty} (x + x^3) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to \infty} (x + x^3) = \infty.$$

Como f *é contínua, segue do Teorema do Valor Intermediário que* f *é sobrejetora. Portanto,* g *admite função inversa* g.

(b) Utilizando o resultado obtido no exercício 37, teremos $g'(x) = \frac{1}{1+3g(x)^2}$.

(c) Como $f(0) = 0$ *temos que* $g(0) = 0$ *portanto*

$$g'(0) = \frac{1}{1 + 3 \cdot 0^2} = 1.$$