Método de Jacobi-Richardson

Estagiária PAE: Ana Paula Mazzini

Marina Andretta / Franklina Toledo

Baseado no livro Cálculo Numérico, de Neide B. Franco.

31 de agosto de 2012

Introdução

Já vimos que existem dois tipos de métodos numéricos para a solução de sistemas lineares:

- Métodos Exatos;
- Métodos Iterativos.

Métodos exatos

Métodos como

- Método de eliminação de Gauss;
- Método de fatoração LU;
- Método de fatoração Cholesky;

são ditos exatos: obtém a solução final após um número k de passos.

Em alguns casos/aspectos, métodos iterativos têm algumas vantagens:

- são melhores em matrizes esparsas;
- apresentam auto-correção de erros (podem ser usados para melhorar a solução obtida por métodos exatos).

Métodos Iterativos

- Um método é chamado de **iterativo** quando fornece uma sequência de aproximantes da solução.

- No caso de métodos iterativos, precisamos saber se a sequência que estamos calculando está convergindo ou não para a solução.

Métodos Iterativos

Idéia Geral: Queremos resolver o sistema:

$$Ax = b.$$

Para tanto vamos reescrever o sistema como:

$$x = Bx + g,$$

onde $B = I - A$, $g = b$, por exemplo.

Métodos Iterativos

"Chutamos" um valor inicial para x: $x^{(0)}$. Obtemos:

$$
\begin{aligned}
x^{(1)} &= Bx^{(0)} + g; \\
x^{(2)} &= Bx^{(1)} + g; \\
x^{(3)} &= Bx^{(2)} + g; \\
&\vdots \\
x^{(k+1)} &= Bx^{(k)} + g.
\end{aligned}
$$

Processo estacionário

A equação:

$$x^2 - x = 0$$

pode ser reescrita como:

$$x = x^2$$

ou como:

$$x = \sqrt{x}$$

É fácil ver que:

para x = 0, temos: $x = x^2 = 0^2 = 0$ e $x = \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$;

para x = 1, temos: $x = x^2 = 1^2 = 1$ e $x = \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$.

E se tomassemos o processo iterativo:

$$x^{(k+1)} = \sqrt{x^{(k)}}$$

para $x^{(0)} = 1$, temos: $x^{(1)} = \sqrt{x^{(0)}} = \sqrt{1} = 1$;

para $x^{(0)} = 2$, temos:

$$x^{(1)} = \sqrt{x^{(0)}} = \sqrt{2} = 1,4142 \ (x \neq \sqrt{x});$$
$$x^{(2)} = \sqrt{x^{(1)}} = \sqrt{1,4142} = 1,1892 \ (x \neq \sqrt{x});$$
$$x^{(3)} = \sqrt{x^{(2)}} = \sqrt{1,1892} = 1,0905 \ (x \neq \sqrt{x});$$
$$x^{(4)} = \sqrt{x^{(3)}} = \sqrt{1,0905} = 1,0443 \ (x \neq \sqrt{x});$$
$$x^{(5)} = \sqrt{x^{(4)}} = \sqrt{1,0443} = 1,0219 \ (x \neq \sqrt{x});$$

...

$$x^{(14)} = \sqrt{x^{(13)}} = \sqrt{1,0001} = 1,0000.$$

Convergência

A série

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$$

converge?

Critério: A série será convergente se, para alguma norma de matrizes, $||B|| < 1$.

Revisão: Normas

Definição: chama-se norma de um vetor x, em símbolo $||x||$, qualquer função definida num espaço vetorial E, com valores em $\boldsymbol{R}$, satisfazendo as seguintes condições:

1) $||x|| \geq 0$ e $||x|| = 0$ se, e somente se, $x = 0$ (vetor nulo);

2) $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$ para todo escalar λ;

3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (desigualdade triangular).

Exemplos de normas:

- $||x||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$ - norma infinito;
- $||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ - norma um.
- $||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ - norma euclidiana;

Exemplo: $x = (5, 0, 6, 4, 2)^T$

- $||x||_\infty = 6$;
- $||x||_1 = 17$.
- $||x||_2 = 9$;

Definição: Chama-se norma de uma matriz A, em símbolo $||A||$, qualquer função definida no espaço vetorial das matrizes $n \times n$, com valores em $\boldsymbol{R}$, satisfazendo as seguintes condições:

- 1) $||A|| \geq 0$ e $||A|| = 0$ se, e somente se, $A = 0$ (matriz nula);
- 2) $||\lambda A|| = |\lambda|||A||$ para todo escalar λ;
- 3) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$ (desigualdade triangular).

Revisão: Normas

Seja A uma matriz nxn, definimos:

$||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ - norma infinito (norma linha);

$||A||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ - norma coluna.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$||A||_\infty = \max\{6, 13, 4\} = 13;$

$||A||_1 = \max\{10, 7, 6\} = 10.$

O Método de Jacobi-Richardson

Considere o sistema linear $Ax = b$ de ordem n, onde $det(A) \neq 0$, isto é:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

A matriz A pode ser escrita como a soma de três matrizes:

$$A = L + D + R,$$

onde:

- L é uma matriz triangular inferior formada pela parte inferior de A,
- D é uma matriz diagonal formada pela diagonal de A e
- R é uma matriz triangular superior formada pela parte superior de A.

Então: $L = (l_{ij})$, $D = (d_{ij})$ e $R = (r_{ij})$, onde:

$$l_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, i > j \\ 0, i \leq j \end{cases} \; ; \; d_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \; ; \; r_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, i < j \\ 0, i \geq j \end{cases} \; .$$

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O Método de Jacobi-Richardson

Supondo que $det(D) \neq 0$, podemos transformar o sistema linear original em:

$$\begin{aligned} Ax &= b & \Rightarrow \\ (L+D+R)x &= b & \Rightarrow \\ Dx &= -(L+R)x + b & \Rightarrow \\ x &= -D^{-1}(L+R)x + D^{-1}b & , \end{aligned}$$

onde $-D^{-1}(L+R) = B$ e $D^{-1}b = g$.

O Método de Jacobi-Richardson

O processo iterativo definido por

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+R)x^{(k)} + D^{-1}b$$

é chamado de *Método de Jacobi-Richardson*.

O Método de Jacobi-Richardson

Supondo que $det(D) \neq 0$ ($a_{ii} \neq 0$, $i = 1, ..., n$) e dividindo cada linha de A pelo elemento da diagonal, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 1 & a_{23}/a_{22} \\ a_{31}/a_{33} & a_{32}/a_{33} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^* & a_{13}^* \\ a_{21}^* & 1 & a_{23}^* \\ a_{31}^* & a_{32}^* & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21}^* & 0 & 0 \\ a_{31}^* & a_{32}^* & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12}^* & a_{13}^* \\ 0 & 0 & a_{23}^* \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim temos:

$$A^* = L^* + I + R^*.$$

O Método de Jacobi-Richardson

No caso geral

$$l_{ij}^* = \begin{cases} a_{ij}^* = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}, i > j \\ 0, i \leq j \end{cases} \; ; \; r_{ij}^* = \begin{cases} a_{ij}^* = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}, i < j \\ 0, i \geq j \end{cases} \; ; b_i^* = \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

O Método de Jacobi-Richardson

Reescrevendo novamente o sistema, temos:

$$\begin{aligned} Ax = & \quad b && \Rightarrow \\ A^*x = & \quad b^* && \Rightarrow \\ (L^* + I + R^*)x = & \quad b^* && \Rightarrow \\ x = & \quad -(L^* + R^*)x + b^* && , \end{aligned}$$

onde $-(L^* + R^*) = B$ e $b^* = g$. O processo iterativo fica:

$$x^{(k+1)} = -(L^* + R^*)x^{(k)} + b^*.$$

Vimos que o processo iterativo

$$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + g$$

converge se $||B|| < 1$, para ao menos uma norma.

No caso do Método de Jacobi-Richardson ele converge se ao menos um critério de convergência é satisfeito. Ou seja, se para alguma norma $||L^* + R^*|| < 1$.

Convergência do Método de Jacobi-Richardson

- Critério das linhas

$$||L^* + R^*||_\infty < 1.$$

$$\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}^*|.$$

- Critério das Colunas

$$||L^* + R^*||_1 < 1.$$

$$\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}^*| < 1;$$

Convergência do Método de Jacobi-Richardson

Note que, se a matriz for estritamente diagonal dominante (isto é, em cada linha, o módulo do elemento da diagonal é estritamente maior que a soma de todos os módulos dos outros elementos da linha), então o critério de convergência é automaticamente atendido para $B = -(L^* + R^*)$.

Critérios de Parada

- Erro absoluto

$$E_{abs} = ||x^k - x^{k-1}|| \leq \epsilon.$$

- Erro relativo

$$E_{rel} = \frac{||x^k - x^{k-1}||}{||x^k||} \leq \epsilon.$$

Geralmente, ϵ é um valor suficientemente pequeno que nos indica a tolerância que o erro poderá ter (ex: $\epsilon = 10^{-2}, \epsilon = 10^{-3}, \epsilon = 10^{-4}$).

Exemplo

Resolva o sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8, \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

pelo Método de Jacobi-Richardson com $x^{(0)} = (0.7, -1.6, 0.6)^T$, até

encontrar um erro menor do que 10^{-2}.

Exemplo (solução)

Primeiramente, vamos verificar se é possível obter convergência.
Vemos que a matriz é estritamente diagonal dominante:

$$
\begin{aligned}
|a_{12}| + |a_{13}| = |2| + |1| < |10| = |a_{11}|,\\
|a_{21}| + |a_{23}| = |1| + |1| < |5| = |a_{22}|,\\
|a_{31}| + |a_{32}| = |2| + |3| < |10| = |a_{33}|.
\end{aligned}
$$

Isso já nos garante que o método irá convergir.

Exemplo (solução)

Critério das linhas:

$$\begin{aligned}
|a_{12}^*| + |a_{13}^*| &= |0.2| + |0.1| = 0.3,\\
|a_{21}^*| + |a_{23}^*| &= |0.2| + |0.2| = 0.4,\\
|a_{31}^*| + |a_{32}^*| &= |0.2| + |0.3| = 0.5,
\end{aligned}$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1, j \neq i}^{3} |a_{ij}^*| = 0.5 < 1.$$

Critério das colunas:

$$\begin{aligned}
|a_{21}^*| + |a_{31}^*| &= |0.2| + |0.2| = 0.4,\\
|a_{12}^*| + |a_{32}^*| &= |0.2| + |0.3| = 0.5,\\
|a_{13}^*| + |a_{23}^*| &= |0.1| + |0.2| = 0.3,
\end{aligned}$$

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1, i \neq j}^{3} |a_{ij}^*| = 0.5 < 1.$$

Exemplo (solução)

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.2x_2^{(k)} - 0.1x_3^{(k)} + 0.7, \\ x_2^{(k+1)} = -0.2x_1^{(k)} - 0.2x_3^{(k)} - 1.6, \\ x_3^{(k+1)} = -0.2x_1^{(k)} - 0.3x_2^{(k)} + 0.6. \end{cases}$$

- Iteração 1:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -0.2x_2^{(0)} - 0.1x_3^{(0)} + 0.7 = -0.2(-1.6) - 0.1(0.6) + 0.7 = 0.96, \\ x_2^{(1)} = -0.2x_1^{(0)} - 0.2x_3^{(0)} - 1.6 = -0.2(0.7) - 0.2(0.6) - 1.6 = -1.86, \\ x_3^{(1)} = -0.2x_1^{(0)} - 0.3x_2^{(0)} + 0.6 = -0.2(0.7) - 0.3(-1.6) + 0.6 = 0.94. \end{cases}$$

Exemplo (solução)

Calculando o erro:

$$E_{abs} = \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 0.26 \\ -0.26 \\ 0.34 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.34 > 10^{-2},$$

$$E_{rel} = \frac{||x^{(1)} - x^{(0)}||_\infty}{||x^{(1)}||_\infty} = \frac{0.34}{1.86} \simeq 0.1828 > 10^{-2}.$$

Exemplo (solução)

Como o critério de parada não foi satisfeito, continuamos o processo iterativo.

k	0	1	2	3	4
x_1	0.7	0.96	0.978	0.9994	0.9979
x_2	-1.6	-1.86	-1.98	-1.9888	-1.9996
x_3	0.6	0.94	0.966	0.9984	0.9968

Exemplo (solução)

Calculando o erro:

$$E_{abs} = \|x^{(4)} - x^{(3)}\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} -0.0015 \\ 0.0108 \\ 0.0016 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.0108 > 10^{-2},$$

$$E_{rel} = \frac{||x^{(4)} - x^{(3)}||_\infty}{||x^{(4)}||_\infty} = \frac{0.0108}{1.9996} \simeq 0.0054 < 10^{-2}.$$

Com isso, paramos o processo iterativo e devolvemos $x^{(4)}$ como solução do sistema.

Método de Gauss-Seidel

Marina Andretta / Franklina Toledo

Baseado no livro Cálculo Numérico, de Neide B. Franco.

31 de agosto de 2012

Introdução

Como vimos, queremos resolver o sistema linear:

$$Ax = b.$$

Para tanto vamos reescrever o sistema como:

$$x = Bx + g.$$

O processo iterativo definido por

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + R)x^{(k)} + D^{-1}b$$

é chamado de *Método de Jacobi-Richardson*.

O Método de Gauss-Seidel

Transformando o sistema:

$$(L^* + I + R^*)x = b^*.$$

em:

$$(L^* + I)x = -R^*x + b^*$$

$$x = -(L^* + I)^{-1}R^*x + (L^* + I)^{-1}b^*$$

O processo iterativo definido por:

$$x^{(k+1)} = -(L^* + I)^{-1}R^*x^{(k)} + (L^* + I)^{-1}b^*$$

é chamado de *Método de Gauss-Seidel*.

O Método de Gauss-Seidel

Observe que multiplicando:

$$x^{(k+1)} = -(L^* + I)^{-1} R^* x^{(k)} + (L^* + I)^{-1} b^*$$

por $(L^* + I)$ temos:

$$(L^* + I)x^{(k+1)} = -R^* x^{(k)} + b^*$$

ou ainda:

$$x^{(k+1)} = -L^* x^{(k+1)} - R^* x^{(k)} + b^*$$

O Método de Gauss-Seidel

$$x^{(k+1)} = -L^* x^{(k+1)} - R^* x^{(k)} + b^*$$

pode ser escrito como:

$$\begin{array}{llllll}
x_1^{(k+1)} = & 0 & -a_{12}^* x_2^{(k)} & -a_{13}^* x_3^{(k)} \dots & -a_{1n}^* x_n^{(k)} & +b_1^* \\
x_2^{(k+1)} = & -a_{21}^* x_1^{(k+1)} & +\ 0 & -a_{23}^* x_3^{(k)} \dots & -a_{2n}^* x_n^{(k)} & +b_2^* \\
x_3^{(k+1)} = & -a_{31}^* x_1^{(k+1)} & -a_{32}^* x_2^{(k+1)} & +\ 0\ \dots & -a_{3n}^* x_n^{(k)} & +b_3^* \\
\dots & & & & & \\
x_n^{(k+1)} = & -a_{n1}^* x_1^{(k+1)} & -a_{n2}^* x_2^{(k+1)} & \dots & -a_{n,n-1}^* x_{n-1}^{(k+1)} & +b_n^*
\end{array}$$

O Método de Gauss-Seidel

Note que as componentes $x^{(k+1)}$ podem ser calculadas sucessivamente sem a necessidade de se calcular $(L^* + I)^{-1}$.

Observe também que usamos para o cálculo de uma componente de $x^{(k+1)}$ o valor mais recente das demais componentes. Por esse motivo o método de Gauss-Seidel também é conhecido por *Método dos Deslocamentos Sucessivos*.

Esse método difere de Jacobi-Richardson por utilizar no cálculo de uma componente de $x^{(k+1)}$ o valor mais recente das demais componentes.

Exemplo

Resolva o sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8, \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

pelo Método de Gauss-Seidel com $x^{(0)} = (0.7, -1.6, 0.6)^T$, até encontrar um erro menor do que 10^{-2}.

Convergência

A série

$$x^{(k+1)} = -L^* x^{(k+1)} - R^* x^{(k)} + b^*$$

converge?

Critério: A série será convergente se, para alguma norma de matrizes, $||B|| < 1$.

Qual é a B no método de Gauss-Seidel?

A B no método de Gauss-Seidel é dada por:

$$B = -(L^* + I^*)^{(-1)} R^*$$

Normas consistentes

Definição: se uma norma de matriz e uma norma de vetor estão relacionadas de tal forma que a desigualdade

$$||Ax|| \leq ||A||||x||$$

é satisfeita para qualquer x, então dizemos que as duas normas são **consistentes**.

obs. a norma infinito para matrizes e a norma infinito para vetores são consistentes.

Convergência

Logo, temos que:

$$||Bx|| \leq ||B||||x||$$

Se $||B|| \leq k$ temos que

$$||Bx|| \leq ||B||||x|| \leq k||x||$$

impondo que $k < 1$ teremos que

$$||B|| < 1$$

Seja

$$y = Bx$$

Para o método de Gauss-Seidel, sabemos que:

$$B = -(L^* + I)^{-1}R^*$$

Logo,

$$y = -(L^* + I)^{-1}R^*x$$

$$(L^* + I)y = -R^*x$$

$$y = -L^*y - R^*x$$

Convergência

Dado que $y = -L^* y - R^* x$ podemos escrever que:

$$\begin{cases} y_1 = & -a_{12}^* x_2 & -a_{13}^* x_3 & -a_{14}^* x_4 & -\dots & -a_{1n}^* x_n \\ y_2 = & -a_{21}^* y_1 & -a_{23}^* x_3 & -a_{24}^* x_4 & -\dots & -a_{2n}^* x_n \\ y_3 = & -a_{31}^* y_1 & -a_{32}^* y_2 & -a_{34}^* x_4 & -\dots & -a_{2n}^* x_n \\ \vdots & & & & & \\ y_n = & -a_{n1}^* y_1 & -a_{n2}^* y_2 & -a_{n3}^* y_3 & -\dots & -a_{n,n-1}^* y_n \end{cases}$$

Queremos calcular $||Bx||_\infty$ e sabemos que $||Bx||_\infty = ||y||_\infty$, ou seja,

$$||Bx|| = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i|$$

Sabemos que:

$$|y_1| = |-a^*_{12}x_2 - a^*_{13}x_3 - a^*_{14}x_4 - \ldots - a^*_{1n}x_n|$$

$$|y_1| = |\sum_{j=2}^{n} -a^*_{1j}x_j|$$

$$|y_1| \leq \sum_{j=2}^{n} |-a^*_{1j}x_j| \leq \sum_{j=2}^{n} |a^*_{1j}||x_j|$$

$$|y_1| \leq \sum_{j=2}^{n} |a^*_{1j}| \ \max_j |x_j| = \sum_{j=2}^{n} |a^*_{1j}| \ ||x||_\infty$$

$$|y_1| \leq \beta_1 ||x||_\infty \qquad \text{em que } \beta_1 = \sum_{j=2}^{n} |a^*_{1j}|$$

Convergência

Calculando $|y_2|$:

$$|y_2| = | - a^*_{21}y_1 - a^*_{23}x_3 - a^*_{24}x_4 - \ldots - a^*_{1n}x_n|$$

$$|y_2| = | - a^*_{21}y_1 + \sum_{j=3}^{n} -a^*_{2j}x_j|$$

$$|y_2| \leq | - a^*_{21}y_1| + \sum_{j=3}^{n} | - a^*_{2j}x_j| \leq |a^*_{21}|\ |y_1| + \sum_{j=3}^{n} |a^*_{2j}||x_j|$$

$$|y_2| \leq |a^*_{21}|\ \beta_1\ ||x||_\infty + \sum_{j=3}^{n} |a^*_{2j}|\ \max_j |x_j|$$
$$|y_2| \leq |a^*_{21}|\ \beta_1\ ||x||_\infty + \sum_{j=3}^{n} |a^*_{2j}|\ ||x||_\infty$$

$$|y_2| \leq \beta_2||x||_\infty \qquad \text{em que } \beta_2 = |a^*_{21}|\beta_1 + \sum_{j=3}^{n} |a^*_{2j}|$$

Calculando $|y_i|$:

$$|y_i| = |-a^*_{i1}y_1 - a^*_{i2}y_2 - \ldots - a^*_{i,i-1}y_{i-1} - a^*_{i,i+1}x_{i+1} - \ldots - a^*_{in}x_n|$$

$$|y_i| = |\textstyle\sum_{j=1}^{i-1} -a^*_{ij}y_j + \sum_{j=i+1}^{n} -a^*_{ij}x_j| \leq \sum_{j=1}^{i-1} |-a^*_{ij}y_j| + \sum_{j=i+1}^{n} |-a^*_{ij}x_j|$$

$$|y_i| \leq \textstyle\sum_{j=1}^{i-1} |-a^*_{ij}|\ |y_j| + \sum_{j=i+1}^{n} |-a^*_{ij}|\ |x_j|$$

$$|y_i| \leq \textstyle\sum_{j=1}^{i-1} |-a^*_{ij}|\ \beta_j\ ||x||_\infty + \sum_{j=i+1}^{n} |-a^*_{ij}|\ \max_j |x_j|$$

$$|y_i| \leq \textstyle\sum_{j=1}^{i-1} |-a^*_{ij}|\ \beta_j\ ||x||_\infty + \sum_{j=i+1}^{n} |-a^*_{ij}|\ ||x||_\infty$$

Convergência

Portanto:

$$|y_i| \leq \beta_i ||x||_\infty$$

em que: $\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}^*| \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}^*|$.

Convergência

Sabemos que:

- $||Bx||_\infty = ||y||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \ \beta_i ||x||_\infty$
- $||Bx||_\infty \leq ||B||_\infty ||x||_\infty$

logo, como $||Bx||_\infty \leq k||x||_\infty$ temos que

$$||B||_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \ \beta_i$$

em que: $\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}^*|\beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}^*|$.

Convergência

Se

$$\max_{1 \leq i \leq n} \ \beta_i < 1$$

teremos que: $||B||_\infty < 1$ e, portanto, estará satisfeita uma condição suficiente de convergência.

Este é o critério de Sassenfeld.

O método de Gauss-Seidel converge se:

a) o critério de **Sassenfeld** for satisfeito, ou seja,

$$\max_{1 \le i \le n} \ \beta_i < 1$$

em que: $\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}^*| \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}^*|$.

b) o critério das linhas for satisfeito, ou seja,

$$\max_{1 \le i \le n} \ \sum_{j=1, j \ne i}^{n} |a_{ij}^*| < 1$$

c) se a matriz dos coeficientes for estritamente diagonal dominante.

Exemplo

Resolva o sistema linear abaixo pelo método de Gauss-Seidel, com *erro* $< 10^{-2}$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 5x_1 & + & 1x_2 & + & 1x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 1x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Solução: verificando a convergência:

- A matriz não é estritamente dominante;
  FALHA
- pelo critério das linhas
  $\max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a^*_{ij}| = \max\{0.4, 1.0, 1.0\} = 1.0 \not< 1$
  FALHA
- Critério de Sassenfeld

Exemplo

Critério de Sassenfel:

$$\max_{1\leq i\leq n} \quad \beta_i < 1$$

em que $\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} |a^*_{ij}| \; \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a^*_{ij}|$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 5x_1 & + & 1x_2 & + & 1x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 1x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \end{array} \right. \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.20 & 0.20 \\ 0.75 & 1.00 & 0.25 \\ 0.50 & 0.50 & 1.00 \end{pmatrix}$$

$\beta_1 = 0.20 + 0.20 = 0.40$ $\qquad$ $\beta_2 = |0.75| \; 0.40 + 0.25 = 0.55$
$\beta_3 = |0.50| \; 0.40 + |0.50| \; 0.55 = 0.475$

$\max\{0.40, 0.55, 0.475\} = 0.55 < 1.0$

Logo, segundo este critério o método de Gauss-Seidel converge!

Exemplo

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} & = & -0.20x_2^{(k)} - 0.20x_3^{(k)} + 1.00 \\ x_2^{(k+1)} & = & -0.75x_1^{(k+1)} - 0.25x_3^{(k)} + 1.50 \\ x_3^{(k+1)} & = & -0.50x_1^{(k+1)} - 0.50x_2^{(k+1)} + 0.00 \end{cases}$$

A partir de $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, temos $x^{(1)} =$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} & = & 1.000 \\ x_2^{(1)} & = & -0.750(1.000) + 1.500 = 0.750 \\ x_3^{(1)} & = & -0.500(1.000) - 0.500(0.750) = -0.875 \end{cases}$$

O erro relativo é igual a: $\frac{||x^{(1)} - x^{(0)}||_\infty}{||x^{(1)}||_\infty} = \frac{1.000}{1.000} = 1.000 > 0.01.$

Exemplo

$$\begin{cases} x_1^{(2)} &= -0.200(0.750) - 0.200(-0.875) + 1.000 = 1.025 \\ x_2^{(2)} &= -0.750(1.025) - 0.250(-0.875) + 1.500 = 0.950 \\ x_3^{(2)} &= -0.500(1.025) - 0.500(0.950) = -0.9875 \end{cases}$$

O erro relativo é igual a: $\frac{||x^{(2)} - x^{(1)}||_\infty}{||x^{(2)}||_\infty} = \frac{0.2}{1.025} = 0.1951 > 0.01.$

...