SME0211 - Otimização Linear
Segundo semestre de 2016

Professora: Marina Andretta (andretta@icmc.usp.br)
Estagiário PAE: Valdemar Abrão Pedro Anastácio Devesse (valdemar.abrao@usp.br)

Lista de exercícios 3 - gabarito

1. Definamos o conceito de dependência linear: se existe um coleção finita de vetores $x^1, x^2, ..., x^k \in I\!R^n$ e uma coleção finita de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ sendo que nesta coleção nem todos são iguais a zero, tal que a combinação linear destes é nula, isto é, $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k x^k = 0$, então diz-se que existe depêndencia linear.

Primeiramente, vamos mostrar que se um vetor, digamos x^1, pode ser expresso como combinação linear dos demais $(x^2, ..., x^k)$, então os vetores $x^1, x^2, x^3, ..., x^k$ são linearmente dependentes.

Como x^1 pode ser escrito como combinação linear dos demais, temos que $x^1 = \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_k x^k$. Então, $-x^1 + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_k x^k = 0$. Como o vetor x^1 está multiplicado por -1, os vetores $x^1, x^2, ..., x^k$ são linearmente dependentes.

Agora vamos mostrar que se os vetores $x^1, x^2, x^3, ..., x^k$ são linearmente dependentes, então algum vetor x^i pode ser escrito como combinação linear dos demais. Como $x^1, x^2, x^3, ..., x^k$ são linearmente dependentes, temos que $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k x^k = 0$, para α_i não todos nulos. Considere um dos vetores x^i com $\alpha_i \neq 0$. Temos que

$$0 = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k x^k = \sum_{k=1, k\neq i}^{K} \alpha_k x^k + \alpha_i x^i \Rightarrow \alpha_i x^i = -\sum_{k=1, k\neq i}^{K} \alpha_k x^k \Rightarrow x^i = -\frac{1}{\alpha_i} \sum_{k=1, k\neq i}^{K} \alpha_k x^k.$$

Ou seja, x^i é combinação linear dos demais vetores.

2. Consideremos que $x^1, x^2, ..., x^K$ formam uma base $I\!R^n$ e que temos escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_K$ tais que o nosso vetor arbitrário y é expresso como uma combinação linear, $y = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k x^k$. Note que podemos escolher n vetores x^i de forma que estes vetores sejam linearmente independentes. Suponha, sem perda de generalidade, que estes sejam os n primeiros vetores $x^1, ..., x^n$.

Esta combinação linear é equivalente a $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x^k$ e esta, por sua vez, é equivalente a $y = X\alpha$, com X uma matriz cujas colunas são os vetores x^i, $i = 1, ..., n$, e α um vetor cujas componentes são α_i. Como X é inversível, temos que $\alpha = X^{-1}y$.

3. Se $S = \{Ax | x \in I\!R^n\}$ e queremos mostrar que S é um subespaço de $I\!R^n$ com A dado, então queremos mostrar que, para todo escalar α_i,

$$\alpha_1 A x^1 + \alpha_2 A x^2 + ... + \alpha_k A x^k \in S \subset I\!R^n.$$

Considere $y^1, y^2, ..., y^k \in S$ e escalares α_i, $i = 1, ..., k$ quaisquer. Sabemos que existem $x^1, ..., x^k \in I\!R^n$ tais que $y^i = Ax^i$, $i = 1, ..., k$.

Temos então que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i y^i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A x^i = A \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i \right) \in S.$$

Portanto, S é um subespaço.

4. Seja m a dimensão de S. Se S é subespaço próprio de $\mathbb{R}^n$, então $m < n$ e existem $n - m$ vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^n$ que são ortogonais a S. Vamos chamar estes vetores de $b^1, ..., b^{n-m}$ e seja B uma matriz cujas colunas são $b^1, ..., b^{n-m}$.

Note que, para todo elemento x de S, ao calcular Bx teremos o vetor nulo, já que $(b^i)^T x = 0$ para todo $x \in S$. Além disso, para todo vetor y que não está em S, y pode ser escrito como uma combinação linear de b^i. Ou seja, $By \neq 0$.

5. Como V é um subespaço afim m-dimensional, sejam $s^0 \in \mathbb{R}^n$ e $S \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço de dimensão m tal que $V = \{s + s^0 | s \in S\}$. Como $m < n$, S é um subespaço próprio de $\mathbb{R}^n$. Então existem $n - m$ vetores de $\mathbb{R}^n$ linearmente independentes, ortogonais a S. Chame-os de $a_1, ..., a_{n-m}$. Defina $\alpha_i = a_i^T s^0$.

Seja $x \in V$. Temos que $x = s + s^0$, com $s \in S$. Então $a_i^T(s + s^0) = a_i^T s + a_i^T s^0 = a_i^T s^0 = \alpha_i$, para $i = 1, ..., n - m$.

Além disso, se $a_i^T y = \alpha_i = a_i^T s^0$, para $i = 1, ..., n - m$, temos que $a_i^T (y - s^0) = 0$. Ou seja, $y - s^0$ é ortogonal a todos os a_i. Então $y - s^0 \in S$. Portanto, $y \in V$.