Degenerescência

Marina Andretta

ICMC-USP

19 de outubro de 2016

Baseado no livro Introduction to Linear Optimization, de D. Bertsimas e J. N. Tsitsiklis.

Degenerescência

De acordo com nossa definição, em uma solução básica devemos ter n restrições ativas linearmente independentes. Isso possibilita que haja mais restrições ativas (mas, claramente, apenas n delas podem ser linearmente independentes).

Neste caso, dizemos que temos uma solução básica degenerada.

Em outras palavras, em uma solução básica degenerada há mais restrições ativas do que o mínimo necessário.

Degenerescência

Definição 1. *Uma solução básica* $x \in \boldsymbol{R}^n$ *é chamada de degenerada se mais de* n *restrições são ativas em* x*.*

Em duas dimensões, uma solução básica degenerada está na interseção de três ou mais retas. Em três dimensões, está na interseção de quatro ou mais planos.

A presença de degenerescência pode afetar muito o comportamento de algoritmos para programação linear.

Exemplo

Considere o poliedro P definido pelas restrições

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 8, \\
 & & x_2 & + & 6x_3 & \leq & 12, \\
 & & & & x_1 & \leq & 4, \\
 & & & & x_2 & \leq & 6, \\
 & & x_1, & & x_2, \; x_3 & \geq & 0.
\end{array}$$

O ponto $(2, 6, 0)$ é viável e para ele 3 restrições são ativas: $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8$, $x_2 \leq 6$ e $x_3 \geq 0$.

Como os vetores correspondentes a essas restrições, dados por $(1, 1, 2)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, são linearmente independentes, o ponto $(2, 6, 0)$ é uma solução básica viável.

Exemplo

Já o ponto $(4, 0, 2)$ é viável e para ele 4 restrições são ativas:
$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8$, $x_2 + 6x_3 \leq 12$, $x_1 \leq 4$ e $x_2 \geq 0$.

Existem vetores correspondentes a 3 destas 4 restrições ativas que são linearmente independentes (por exemplo, $(1, 1, 2)$, $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$).

Portanto, $(4, 0, 2)$ é uma solução básica viável degenerada.

Em uma solução básica de um poliedro na forma padrão, as m restrições de igualdade são sempre ativas. Então, para ter mais de n restrições ativas, é preciso que haja mais de $n - m$ variáveis nulas.

Definição 2. *Considere o poliedro na forma padrão* $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ *e seja* x *uma solução básica. Seja* m *o número de linhas de* A*, todas linearmente independentes. O vetor* x *é uma solução básica degenerada se mais de* $n - m$ *componentes de* x *forem nulas.*

Considere o poliedro do exemplo anterior. Introduzindo as variáveis de folga x_4, x_5, x_6 e x_7, podemos transformá-lo no poliedro na forma padrão $P = \{x = (x_1, x_2, ..., x_7) \mid Ax = b, x \geq 0\}$ com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Para construir uma solução básica, precisamos escolher 4 colunas linearmente independentes de A. Vamos escolher as colunas A_1, A_2, A_3 e A_7.

Exemplo

Resolvendo o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix},$$

temos $(x_1, x_2, x_3, x_7) = (4, 0, 2, 6)$. Definindo as variáveis não-básicas $x_4 = x_5 = x_6 = 0$, temos a solução básica viável $x = (4, 0, 2, 0, 0, 0, 6)$.

Note que esta solução é degenerada, já que a variável $x_2 = 0$ e, por isso, temos 8 restrições ativas em x.

Considere agora as colunas linearmente independentes A_1, A_3, A_4 e A_7. A solução básica viável correspondente também é $x = (4, 0, 2, 0, 0, 0, 6)$.

Degenerescência em poliedros na forma padrão

O exemplo anterior sugere que podemos pensar em degenerescência da seguinte maneira: definimos uma solução básica escolhendo n restrições linearmente independentes a serem satisfeitas por igualdade e, ao fazer isso, percebemos que outras restrições também foram satisfeitas por igualdade.

Se as componentes de A e b são escolhidas aleatoriamente, as chances disso acontecer são pequenas. Além disso, se modificamos um pouco os coeficientes de restrições ativas, a degenerescência pode desaparecer.

No entanto, em problemas práticos, as componentes de A e b possuem uma estrutura especial, não aleatória, e degenerescência é um fato mais comum do que pode parecer.

Degenerescência não é uma propriedade puramente geométrica

A degenerescência não é uma característica puramente geométrica, independente da representação do poliedro usada.

Para ilustrar este fato, considere o poliedro na forma padrão
$P = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_2 + 2x_3 = 2,\ x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$.

O vetor $(1, 1, 0)$ é viável e tem apenas uma componente nula (satisfaz a restrição $x_3 \geq 0$ por igualdade). Portanto, é uma solução básica viável não-degenerada.

Degenerescência não é uma propriedade puramente geométrica

Já o vetor $(0, 0, 1)$ é viável, mas tem 2 componentes nulas (satisfaz as restrições $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ por igualdade). Portanto, é uma solução básica viável degenerada.

Note que o mesmo poliedro pode ser escrito da forma (não-padrão)
$P = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_2 + 2x_3 = 2,\ x_1, x_3 \geq 0\}$.

Para esta nova formulação, o vetor $(0, 0, 1)$ é uma solução básica viável nao-degenerada, já que satisfaz 3 restrições por igualdade: $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$ e $x_3 \geq 0$, todas elas linearmente independentes.

Degenerescência não é uma propriedade puramente geométrica

Como outro exemplo, considere uma solução básica viável não-degenerada x^* de um poliedro da forma padrão $P = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$, com $A \in \boldsymbol{R}^{m \times n}$ com linhas linearmente independentes.

Em particular, $n - m$ componentes de x^* são nulas.

Se considerarmos o mesmo poliedro escrito na forma $P = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid Ax \geq b, -Ax \geq -b, x \geq 0\}$, na solução viável x^* teremos $n - m$ componentes nulas e $2m$ restrições de desigualdade satisfeitas por igualdade, totalizando $n - m + 2m = n + m$ restrições ativas em x^*, das quais n são linearmente independentes.

Ou seja, x^* é uma solução básica viável degenerada.

Degenerescência não é uma propriedade puramente geométrica

Vimos que uma solução básica viável pode ser degenerada usando uma representação de um poliedro e não-degenerada usando outra.

No entanto, podemos mostrar que se uma solução básica viável é degenerada em uma representação na forma padrão de um poliedro P, ela será degenerada em qualquer outra representação na forma padrão de P.