

# **Introdução a Programação Inteira**

2018

# Otimização Inteira



# Otimização Inteira

---



[pixabay.com](http://pixabay.com)

# Otimização

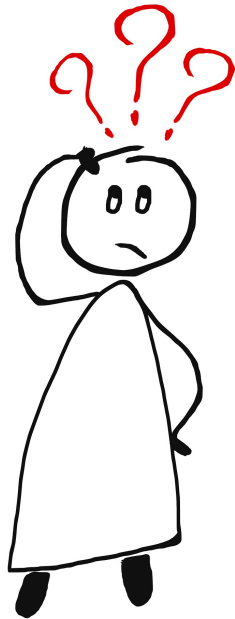
---

“Em matemática, o termo **otimização**, ou **programação matemática**, refere-se ao estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar uma função através da escolha sistemática dos valores de variáveis reais ou inteiras dentro de um conjunto viável.” \*

\* Fonte: Wikipédia, 2018

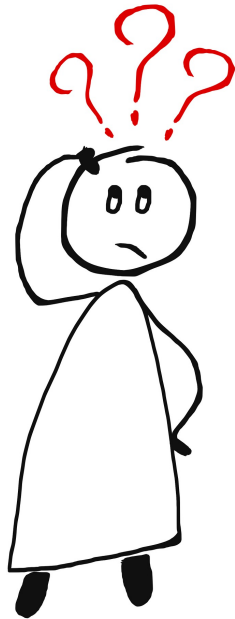
# Otimização

Será que você já resolveu algum problema de otimização ?



# Otimização

Será que você já resolveu algum problema de otimização ?



**JJA!**

# Otimização

Será que você já resolveu algum problema de otimização ?

- quando escolhemos o trajeto para casa: mais curto, mais seguro, mais rápido;
- quanto investimos nosso dinheiro buscando: mais segurança, melhor rentabilidade, menos risco;

Ideia: custo ... benefício

# Otimização

Concurso Proctor and Gamble – 1962.

O problema era encontrar a melhor Rota para percorrer todas as 33 cidades do mapa.

Fonte:

[www.math.uwaterloo.ca/tsp/history/](http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/history/)

**HELP! WE'RE LOST!**

**HELP "CAR 54"... AND WIN CASH**  
54...\$1,000 PRIZES  
ONE...\$10,000 GRAND PRIZE

START and FINISH

Map by Rand McNally

Help Toody and Muldoon find the shortest round trip route to visit all 33 locations shown on the map.  
All you do is draw connecting straight lines from location to location to show the shortest round trip route.

**HERE'S THE CORRECT START...**  
Begin at Chicago, Illinois. From there, lines show correct route as far as Erie, Pennsylvania. Next, do you go to Carlisle, Pennsylvania or Wana, West Virginia? Check the easy instructions on back of this entry blank for details.

© PROCTER & GAMBLE 1962

OFFICIAL RULES ON REVERSE SIDE

The Travelling Salesman Problem: a computational study. Applegate, Bixby, Chvátal and Cook



# Otimização

**HELP! WE'RE LOST!**

**HELP "CAR 54"...AND WIN CASH**  
54...\$1,000 PRIZES  
ONE...\$10,000 GRAND PRIZE

Map by Rand McNally

Help Toody and Muldoon find the shortest round trip route to visit all 33 locations shown on the map. All you do is draw connecting straight lines from location to location to show the shortest round trip route.

**HERE'S THE CORRECT START...**

Begin at Chicago, Illinois. From there, lines show correct route as far as Erie, Pennsylvania. Next, do you go to Carlisle, Pennsylvania or Wana, West Virginia? Check the easy instructions on back of this entry blank for details.

© PROCTER & GAMBLE 1962

OFFICIAL RULES ON REVERSE SIDE



Figure 1.10 Optimal 33-city tour.

# Otimização

---

“Existem duas maneiras de aumentar a eficiência de uma loja, empresa, ou indústria. Uma delas requer a melhoria tecnológica, isto é, atualização dos equipamentos, mudança no processo tecnológico, descoberta de novos e melhores tipos de matéria-prima. A outra maneira, até hoje muito menos utilizada, envolve melhorias na organização do planejamento e da produção. Isto é, melhorias no processo de distribuição do trabalho entre as máquinas da empresa, distribuição de matéria-prima, combustível, entre outros fatores.” \*

\* Traduzido de Kantorovich (**1939**) in Dantzig [12] pag. 22 por Rangel (2012).

# Otimização - quando

---

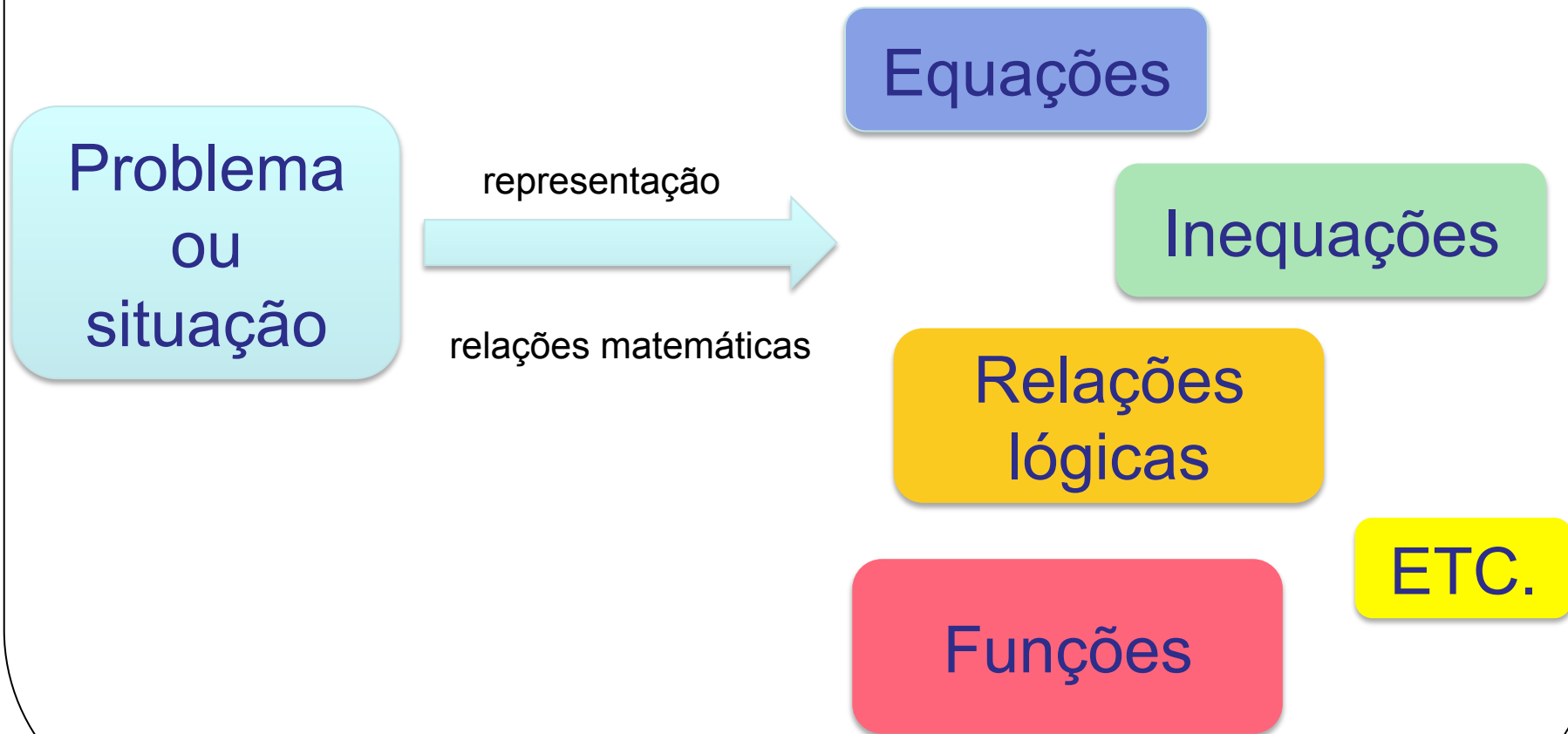
Recursos escassos:

- Minimizar tempo para realizar tarefas diárias;
- Minimizar custos;
- Minimizar o espaço utilizado.

Melhorar eficiência de empresas.

Ajudar na organização do planejamento e da produção.

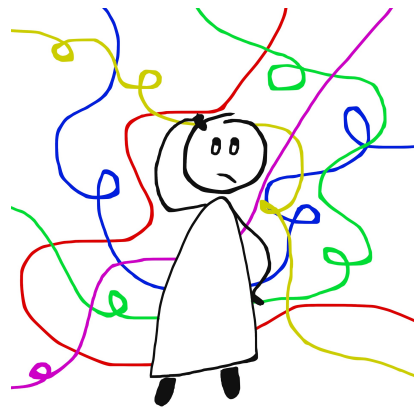
# Otimização: modelo



# Otimização: modelagem

Modelagem

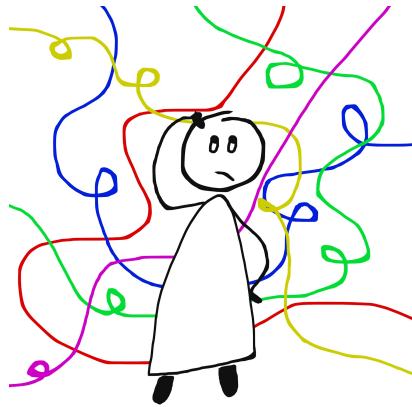
Arte?



# Otimização: modelagem

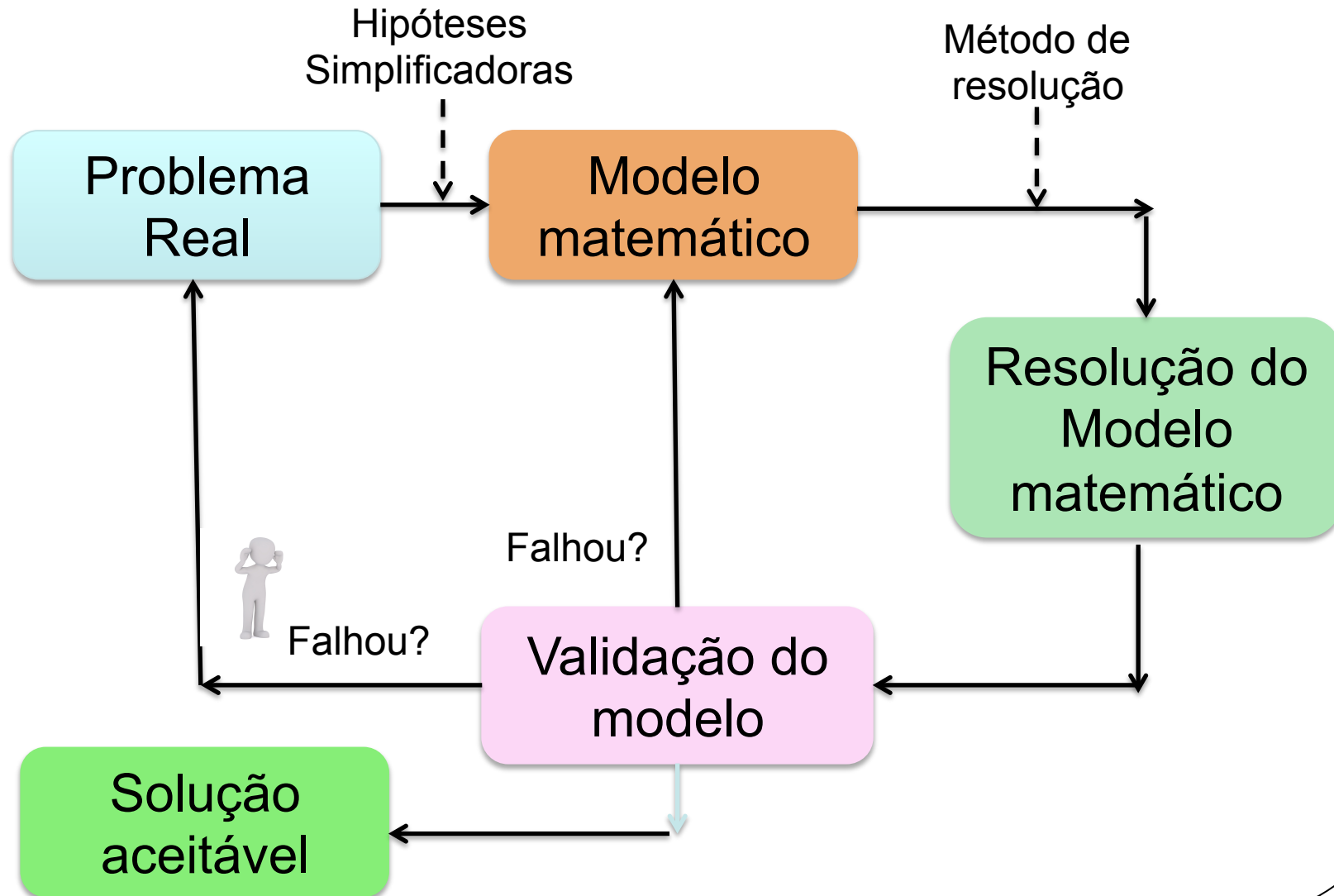
Modelagem

Arte?



Não, ela pode e deve ser sistematizada.

# Otimização: modelagem



# Otimização: modelagem

Razões para construir modelos:

- Entender melhor o problema;
- Analisar diversas soluções;
- Propor soluções não aparentes;
- Experimentar diversos cenários.





# Otimização: modelagem

**Passo Fundamental:**

**Ouvir aquele que lida com o problema real.**



# Otimização: modelagem

**Passo Fundamental:**

**Ouvir aquele que lida com o problema real.**

- Passo 1: Descobrir o que deve ser determinado (variáveis do problema).
- Passo 2: Descobrir o que está disponível (dados do problema).
- Passo 3: Reproduzir os caminhos que levam a uma solução (equações)



# Otimização: modelagem

Formato geral de um modelo

$$\begin{array}{ll} \textit{Min} & f(x) \\ \textit{s.a} & x \in \Omega \end{array}$$

# Associações Científicas

- IFORS - International Federation Of Operational Research Societies (<http://ifors.org/web/>) .
- EURO - The Association of European Operational Research Societes (<http://www.euro-online.org>).
- SOBRAPO - Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional (<http://www.sobrapo.org.br/>)
- SBMAC- Sociedade de Matemática Aplicada e Computacional (<http://www.sbmac.org.br/>).

# Grande área

---

## **Pesquisa Operacional (Operations research)**

“Pesquisa operacional (PO) é um ramo interdisciplinar da matemática aplicada que faz uso de modelos matemáticos, estatísticos e de algoritmos na ajuda à tomada de decisões. É usada sobretudo para analisar sistemas complexos do mundo real, tipicamente com o objetivo de melhorar ou otimizar a performance.” \*

\* Fonte: Wikipedia, 2018.

# Vídeo

---

[www.youtube.com/watch?v=tX6Rw7KJGjE](http://www.youtube.com/watch?v=tX6Rw7KJGjE)

# Otimização Inteira



# Otimização inteira

---

“A otimização inteira é uma área próspera de otimização, que é aplicada hoje em dia a uma infinidade de problemas reais.” \*

Por que Otimização Inteira ?



\* Tradução livre de Conforti et al. 2014



# Otimização inteira

Por que Otimização Inteira ?



Há situações em que para representar a realidade precisamos utilizar valores inteiros, ou seja, as variáveis devem ser obrigatoriamente inteiras, em outras, podemos considerá-las reais.

\* Tradução livre de Conforti et al. 2014

# Otimização inteira ?

- Land e Doig (1960)

THERE IS A growing literature [1, 3, 5, 6] about optimization problems which could be formulated as linear programming problems with additional constraints that some or all of the variables may take only integral values. This form of linear programming arises whenever there are indivisibilities. It is not meaningful, for instance, to schedule  $3 - 7/10$  flights between two cities, or to undertake only  $1/4$  of the necessary setting up operation for running a job through a machine shop. Yet it is basic to linear programming that the variables are free to take on any positive value,<sup>1</sup> and this sort of answer is very likely to turn up.

- Por que não arredondar ?

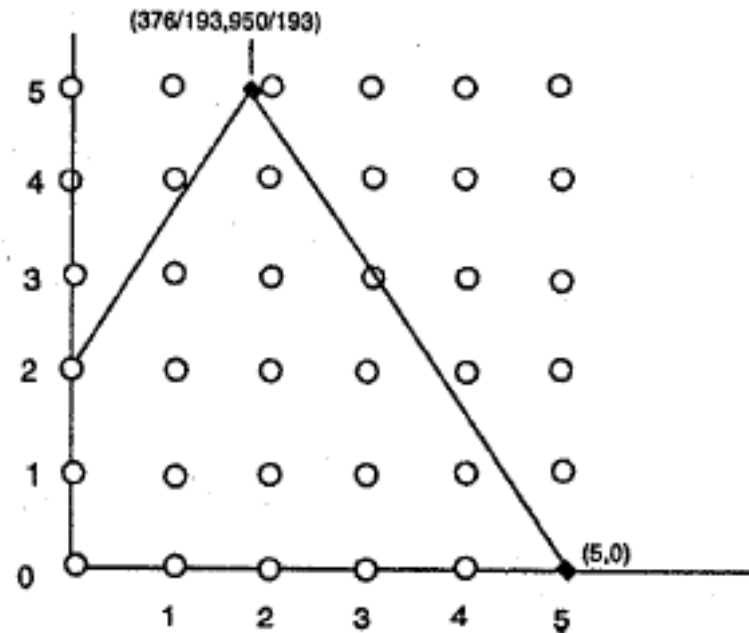


# Resolução via arredondamento

- Ideia: eficiência do simplex **X** similaridade dos problemas inteiros com os problemas contínuos.

- Dificuldade:

$$\begin{aligned} \max & 1.00x_1 + 0.64x_2 \\ & 50x_1 + 31x_2 \leq 250 \\ & 3x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ and integer.} \end{aligned}$$



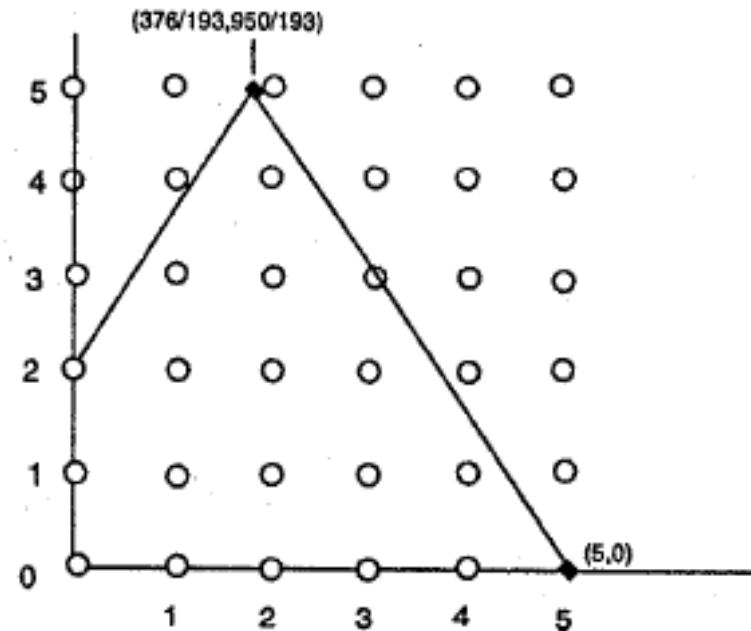
Baseado em "Integer programming" - Wolsey, 1998.

# Resolução via arredondamento

- Ideia: eficiência do simplex **X** similaridade dos problemas inteiros com os problemas contínuos.

- Dificuldade:

$$\begin{aligned} \max & 1.00x_1 + 0.64x_2 \\ & 50x_1 + 31x_2 \leq 250 \\ & 3x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ and integer.} \end{aligned}$$



Situação ainda mais crítica para problemas binários.

Baseado em "Integer programming" - Wolsey, 1998.

---

## **Mais sobre a aplicabilidade (e limites) do arredondamento**

# Situação 1

- Suponha que você quer produzir uma nova ração para cães ao menor custo possível. Depois de muito conversar com um veterinário, você decidiu balancear três componentes: fibra, proteína e gordura.

	Farinha de Peixe	Arroz Integral	Aveia	Qtd. Mínima
Fibra	3	11	5	6
Proteína	21	10	21	15
Gordura	5	2	7	4
Custo	10	5	7	

# Situação 1

- Variáveis de decisão?
  - Quantidades ... Então podem ser reais.

	Farinha de Peixe	Arroz Integral	Aveia	Qtd. Mínima
Fibra	3	11	5	6
Proteína	21	10	21	15
Gordura	5	2	7	4
Custo	10	5	7	

# Situação 1

- Modelo

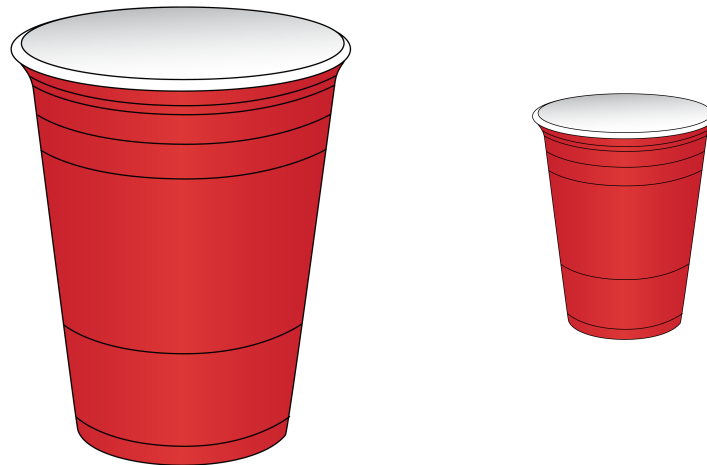
$$\begin{array}{llll} \text{Min} & 10x_1 & +5x_2 & +7x_3 \\ \text{s.a} & 3x_1 & +11x_2 & +5x_3 \geq 6 \\ & 21x_1 & +10x_2 & +21x_3 \geq 15 \\ & 5x_1 & +2x_2 & +7x_3 \geq 4 \\ & x_1, & x_2, & x_3 \geq 0 \end{array}$$

	Farinha de Peixe	Arroz Integral	Aveia	Qtd. Mínima
Fibra	3	11	5	6
Proteína	21	10	21	15
Gordura	5	2	7	4
Custo	10	5	7	



## Situação 2

- Um fábrica produz copos de plástico ecológico. São produzidos dois tipos de copos: café (50ml) e suco (300ml).



## Situação 2

---

- A fábrica tem disponível 5 toneladas de matéria-prima.
- Para produzir 1.000 copos de café é necessário 1 quilo de matéria-prima, enquanto para produzir 1.000 copos de suco se gasta 1,5 quilos.

## Situação 2

- Os copos de café são vendidos a R\$5,00 o cento e os copos de suco a R\$7,00.
- Quantos copos de café e de suco devemos produzir para maximizar a receita da empresa?



## Situação 2

Modelo

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 0,05x_1 + 0,07x_2 \\ \text{s.a} & \frac{1}{1000}x_1 + \frac{1,5}{1000}x_2 \leq 5000 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{array}$$

Será?

Poderia ser:  $x_1, x_2 \geq 0$

## Situação 3

Um empresa de ônibus quer maximizar o lucro diário com viagens entre Bedrock e Pedra Lascada. Sabe-se que a empresa tem 1.000.000 para adquirir sua frota e que os ônibus sempre viajam cheios. Quantos ônibus de cada tipo deve-se comprar de forma a maximizar o lucro?

	Ônibus 1	Ônibus 2
Custo do ônibus	230.000	350.000
Lucro p/ viagem	2.800	4.700
N. Viagens p. dia	5	6

# Situação 3

## Modelo

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 14000x_1 + 28.200x_2 \\ \text{s.a} \quad & 230000x_1 + 350000x_2 \leq 1000000 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

Será?



	Ônibus 1	Ônibus 2
Custo do ônibus	230.000	350.000
Lucro p/ viagem	2.800	4.700
N. Viagens p. dia	5	6

# Resumo

---

Há situações em que as variáveis devem ser obrigatoriamente inteiras, em outras, podemos considerá-las reais.

---

# **Variáveis inteiras como ferramenta de modelagem**



# Otimização inteira

---

- Necessidade das variáveis inteiras (pela própria característica das variáveis - justificativa de Land e Doig e dos slides anteriores).
- Outra situação:
  - Necessitamos das variáveis inteiras como um artifício de modelagem (em particular, vejamos o caso em que necessitamos de variáveis binárias).

# Utilização de variáveis binárias

Decisão sobre uma atitude (fazer ou não fazer, comprar ou não comprar...).

$$x = \begin{cases} 1 & \text{se o evento ocorre} \\ 0 & \text{se o evento não ocorre} \end{cases}$$

# Por exemplo ...

**HELP! WE'RE LOST!**

**HELP "CAR 54"...AND WIN CASH**  
54...\$1,000 PRIZES  
ONE...\$10,000 GRAND PRIZE

Map by Rand McNally

Help Toody and Muldoon find the shortest round trip route to visit all 33 locations shown on the map. All you do is draw connecting straight lines from location to location to show the shortest round trip route.

**HERE'S THE CORRECT START...**

Begin at Chicago, Illinois. From there, lines show correct route as far as Erie, Pennsylvania. Next, do you go to Carlisle, Pennsylvania or Wana, West Virginia? Check the easy instructions on back of this entry blank for details.

© PROCTER & GAMBLE 1962

OFFICIAL RULES ON REVERSE SIDE



Figure 1.10 Optimal 33-city tour.

# Por exemplo ...



$$\text{Min} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ji} = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad S \subseteq N - \{1\}, |S| \geq 2$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad (i, j) \in A$$

# Bibliografia

---

- Nemhauser, G. e Wolsey, L. Integer and Combinatorial Optimization, John Wiley & Sons.
- Wolsey, L. Integer Programming - John Wiley & Sons.
- SALKIN, H.M. - Integer Programming. Addison-Wesley, 1975.
- SCHRIJVER, A. - Theory of Linear and Integer Programming, J. Wiley, 1987.
- Conforti et al. – Integer Programming, Springer, 2014. – *(PDF disponível no site da Biblioteca)*

# Bibliografia

---

- TAHA, H.A. - Integer Programming Theory Applications, and Computations, Academic Press, 1975.
- SAKAROVITH, M. - Optimisation Combinatoire. 4o. volume de Techniques Mathematiques de la Recherche Operationnelle, Univ. Scientifique et Medicale - Inst. National Polytechnique de Grenoble, 1983.