Equações Diferenciais e Aplicações

Everaldo de Mello Bonotto

ICMC - USP

Modelagem

Modelagem Matemática

Modelagem

A Modelagem Matemática é um processo através do qual, a partir de um problema e de dados da realidade, é obtido um modelo matemático.

A Modelagem Matemática é um processo através do qual, a partir de um problema e de dados da realidade, é obtido um modelo matemático.

A resolução do modelo obtido, através da teoria matemática e aplicação de suas técnicas, leva às soluções, que devem ser testadas de modo a constatar a adequação das mesmas aos dados do problema que deu origem ao processo.

A Modelagem Matemática é um processo através do qual, a partir de um problema e de dados da realidade, é obtido um modelo matemático.

A resolução do modelo obtido, através da teoria matemática e aplicação de suas técnicas, leva às soluções, que devem ser testadas de modo a constatar a adequação das mesmas aos dados do problema que deu origem ao processo.

Muitas vezes é necessário aperfeiçoar o modelo, de modo a obter uma solução mais próxima da realidade.

Modelagem

Modelagem

A modelagem de uma situação ou problema real pode ser simplificada no seguinte esquema:

Modelagem

A modelagem de uma situação ou problema real pode ser simplificada no seguinte esquema:

1) **Experimentação:**

Modelagem

A modelagem de uma situação ou problema real pode ser simplificada no seguinte esquema:

1) **Experimentação:** obtenção de dados experimentais que ajudam na compreensão do problema, na modificação e na decisão de sua validade.

Modelagem

A modelagem de uma situação ou problema real pode ser simplificada no seguinte esquema:

1) **Experimentação:** obtenção de dados experimentais que ajudam na compreensão do problema, na modificação e na decisão de sua validade.
2) **Abstração:**

Modelagem

A modelagem de uma situação ou problema real pode ser simplificada no seguinte esquema:

1) **Experimentação:** obtenção de dados experimentais que ajudam na compreensão do problema, na modificação e na decisão de sua validade.
2) **Abstração:** processo de seleção das variáveis essenciais e formulação em linguagem natural do problema ou da situação real.

A modelagem de uma situação ou problema real pode ser simplificada no seguinte esquema:

1) **Experimentação:** obtenção de dados experimentais que ajudam na compreensão do problema, na modificação e na decisão de sua validade.
2) **Abstração:** processo de seleção das variáveis essenciais e formulação em linguagem natural do problema ou da situação real.
3) **Resolução:**

A modelagem de uma situação ou problema real pode ser simplificada no seguinte esquema:

1) **Experimentação:** obtenção de dados experimentais que ajudam na compreensão do problema, na modificação e na decisão de sua validade.
2) **Abstração:** processo de seleção das variáveis essenciais e formulação em linguagem natural do problema ou da situação real.
3) **Resolução:** o modelo é montado quando se substitui a linguagem natural por uma linguagem matemática.

A modelagem de uma situação ou problema real pode ser simplificada no seguinte esquema:

1) **Experimentação:** obtenção de dados experimentais que ajudam na compreensão do problema, na modificação e na decisão de sua validade.
2) **Abstração:** processo de seleção das variáveis essenciais e formulação em linguagem natural do problema ou da situação real.
3) **Resolução:** o modelo é montado quando se substitui a linguagem natural por uma linguagem matemática.

4) **Validação:**

4) **Validação:** comparação entre a solução obtida via resolução do modelo matemático e os dados reais.

4) **Validação:** comparação entre a solução obtida via resolução do modelo matemático e os dados reais.

5) **Modificação:**

4) **Validação:** comparação entre a solução obtida via resolução do modelo matemático e os dados reais.

5) **Modificação:** caso o grau de aproximação entre os dados reais e a solução do modelo não seja aceito, deve-se modificar as variáveis, ou lei de formação do problema, e com isso o próprio modelo original é modificado e o processo se inicia novamente.

4) **Validação:** comparação entre a solução obtida via resolução do modelo matemático e os dados reais.

5) **Modificação:** caso o grau de aproximação entre os dados reais e a solução do modelo não seja aceito, deve-se modificar as variáveis, ou lei de formação do problema, e com isso o próprio modelo original é modificado e o processo se inicia novamente.

6) **Aplicação:**

4) **Validação:** comparação entre a solução obtida via resolução do modelo matemático e os dados reais.

5) **Modificação:** caso o grau de aproximação entre os dados reais e a solução do modelo não seja aceito, deve-se modificar as variáveis, ou lei de formação do problema, e com isso o próprio modelo original é modificado e o processo se inicia novamente.

6) **Aplicação:** a modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender.

Equações Diferenciais

As palavras diferencial e equações obviamente sugerem a resolução de algum tipo de equação envolvendo derivadas.

As palavras diferencial e equações obviamente sugerem a resolução de algum tipo de equação envolvendo derivadas.

Definição: Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial.

As palavras diferencial e equações obviamente sugerem a resolução de algum tipo de equação envolvendo derivadas.

Definição: Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial.

Exemplos:

Exemplos:

a) $\dfrac{dy}{dt} - 7y = 5cos(t) \qquad (y = y(t))$

Exemplos:

a) $\dfrac{dy}{dt} - 7y = 5cos(t) \qquad (y = y(t))$

b) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 6\dfrac{dy}{dx} + 8 = 0 \qquad (y = y(x))$

Exemplos:

a) $\dfrac{dy}{dt} - 7y = 5cos(t) \qquad (y = y(t))$

b) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 6\dfrac{dy}{dx} + 8 = 0 \qquad (y = y(x))$

c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial t} \qquad (u = u(x, t))$

Exemplos de Modelos Matemáticos

Exemplo 1: Absorção de Álcool: Risco de Acidentes.

Exemplo 1: Absorção de Álcool: Risco de Acidentes.

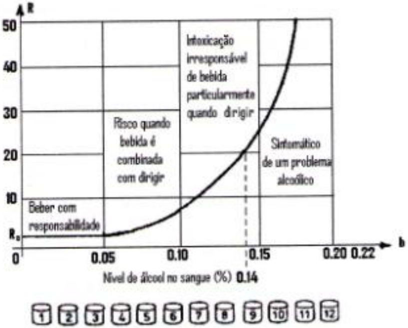
• o nível de álcool no sangue de uma pessoa pode se elevar bruscamente, prejudicando sua capacidade de processar informações.

Exemplo 1: Absorção de Álcool: Risco de Acidentes.

• o nível de álcool no sangue de uma pessoa pode se elevar bruscamente, prejudicando sua capacidade de processar informações.

• para evitar problemas causado pelo álcool, a concentração alcoólica não deve ultrapassar o limite de $0,055\%$.

Modelagem



R
50
40
30
20
10
R_0
0
0.05
0.10
0.15
0.20 0.22
b
Nível de álcool no sangue (%) 0.14
Beber com responsabilidade
Risco quando bebida é combinada com dirigir
Intoxicação irresponsável de bebida particularmente quando dirigir
Sintomático de um problema alcoólico
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Modelagem

Experimentação:

Modelagem

Experimentação: A taxa de variação do número de acidentes é proporcional aos acidentes ocorridos.

Experimentação: A taxa de variação do número de acidentes é proporcional aos acidentes ocorridos.

Abstração:

Experimentação: A taxa de variação do número de acidentes é proporcional aos acidentes ocorridos.

Abstração: escolha das variáveis:

Modelagem

Experimentação: A taxa de variação do número de acidentes é proporcional aos acidentes ocorridos.

Abstração: escolha das variáveis: R (risco relativo de ter um acidente automobilístico) e b (nível de álcool no sangue).

Modelagem

Experimentação: A taxa de variação do número de acidentes é proporcional aos acidentes ocorridos.

Abstração: escolha das variáveis: R (risco relativo de ter um acidente automobilístico) e b (nível de álcool no sangue).

Resolução:

Experimentação: A taxa de variação do número de acidentes é proporcional aos acidentes ocorridos.

Abstração: escolha das variáveis: R (risco relativo de ter um acidente automobilístico) e b (nível de álcool no sangue).

Resolução: Formulação matemática:

Modelagem

Experimentação: A taxa de variação do número de acidentes é proporcional aos acidentes ocorridos.

Abstração: escolha das variáveis: R (risco relativo de ter um acidente automobilístico) e b (nível de álcool no sangue).

Resolução: Formulação matemática: $\dfrac{dR}{dt} = kR, \quad k > 0$ (constante).

Experimentação: A taxa de variação do número de acidentes é proporcional aos acidentes ocorridos.

Abstração: escolha das variáveis: R (risco relativo de ter um acidente automobilístico) e b (nível de álcool no sangue).

Resolução: Formulação matemática: $\dfrac{dR}{dt} = kR, \quad k > 0$ (constante).

Condição inicial: Supondo que com nível zero de álcool no sangue a probabilidade de um acidente é 1%.

Experimentação: A taxa de variação do número de acidentes é proporcional aos acidentes ocorridos.

Abstração: escolha das variáveis: R (risco relativo de ter um acidente automobilístico) e b (nível de álcool no sangue).

Resolução: Formulação matemática: $\dfrac{dR}{dt} = kR, \quad k > 0$ (constante).

Condição inicial: Supondo que com nível zero de álcool no sangue a probabilidade de um acidente é 1%.

Solução: $R(b) = e^{kb}$.

Experimentação: A taxa de variação do número de acidentes é proporcional aos acidentes ocorridos.

Abstração: escolha das variáveis: R (risco relativo de ter um acidente automobilístico) e b (nível de álcool no sangue).

Resolução: Formulação matemática: $\dfrac{dR}{dt} = kR, \quad k > 0$ (constante).

Condição inicial: Supondo que com nível zero de álcool no sangue a probabilidade de um acidente é 1%.

Solução: $R(b) = e^{kb}$.

Validade:

Validade: Para verificarmos a validade, devemos estimar o valor da constante k.

Validade: Para verificarmos a validade, devemos estimar o valor da constante k.

Pelo gráfico, um nível $b = 0,14\%$ de álcool implica em risco de 20% na ocorrência de um acidente.

Validade: Para verificarmos a validade, devemos estimar o valor da constante k.

Pelo gráfico, um nível $b = 0,14\%$ de álcool implica em risco de 20% na ocorrência de um acidente.

$$k = \frac{1}{0,14} \ln 20 = 21,4.$$

Validade: Para verificarmos a validade, devemos estimar o valor da constante k.

Pelo gráfico, um nível $b = 0,14\%$ de álcool implica em risco de 20% na ocorrência de um acidente.

$$k = \frac{1}{0,14} \ln 20 = 21,4.$$

Portanto,

Validade: Para verificarmos a validade, devemos estimar o valor da constante k.

Pelo gráfico, um nível $b = 0,14\%$ de álcool implica em risco de 20% na ocorrência de um acidente.

$$k = \frac{1}{0,14} \ln 20 = 21,4.$$

Portanto,

$$R(b) = e^{21,4b}.$$

Validade: Para verificarmos a validade, devemos estimar o valor da constante k.

Pelo gráfico, um nível $b = 0,14\%$ de álcool implica em risco de 20% na ocorrência de um acidente.

$$k = \frac{1}{0,14} \ln 20 = 21,4.$$

Portanto,

$$R(b) = e^{21,4b}.$$

$\Rightarrow$ Se $R = 100\%$, temos $b = \dfrac{1}{21.4} \ln 100 = 0,22$. Assim, o modelo acusa um acidente certo, quando se tem um nível de 0.22% de álcool no sangue.

Exemplo 2: O formato do tronco de uma palmeira pode ser considerada como uma viga de secção circular em posição vertical. Suponha que a única função do tronco seja suportar-se a si mesmo e que o material de que é constituído seja uniforme. A resistência de um material para suportar um peso sobre ele é medida pela pressão limite, isto é, o peso sustentável é proporcional à área da base de suporte. Partindo destas hipóteses, obtenha o perfil que se pode esperar do tronco da palmeira.

Exemplo 2: O formato do tronco de uma palmeira pode ser considerada como uma viga de secção circular em posição vertical. Suponha que a única função do tronco seja suportar-se a si mesmo e que o material de que é constituído seja uniforme. A resistência de um material para suportar um peso sobre ele é medida pela pressão limite, isto é, o peso sustentável é proporcional à área da base de suporte. Partindo destas hipóteses, obtenha o perfil que se pode esperar do tronco da palmeira.

Solução

Exemplo 2: O formato do tronco de uma palmeira pode ser considerada como uma viga de secção circular em posição vertical. Suponha que a única função do tronco seja suportar-se a si mesmo e que o material de que é constituído seja uniforme. A resistência de um material para suportar um peso sobre ele é medida pela pressão limite, isto é, o peso sustentável é proporcional à área da base de suporte. Partindo destas hipóteses, obtenha o perfil que se pode esperar do tronco da palmeira.

Solução

Seja ρ a densidade do material que é formado a palmeira.

Exemplo 2: O formato do tronco de uma palmeira pode ser considerada como uma viga de secção circular em posição vertical. Suponha que a única função do tronco seja suportar-se a si mesmo e que o material de que é constituído seja uniforme. A resistência de um material para suportar um peso sobre ele é medida pela pressão limite, isto é, o peso sustentável é proporcional à área da base de suporte. Partindo destas hipóteses, obtenha o perfil que se pode esperar do tronco da palmeira.

Solução

Seja ρ a densidade do material que é formado a palmeira. Então o peso suportado pela secção de altura h é dado por

$$\int_h^{h_0} 2\pi\rho R^2(h)dh,$$

onde $R(h)$ é o raio da secção de altura h.

Exemplo 2: O formato do tronco de uma palmeira pode ser considerada como uma viga de secção circular em posição vertical. Suponha que a única função do tronco seja suportar-se a si mesmo e que o material de que é constituído seja uniforme. A resistência de um material para suportar um peso sobre ele é medida pela pressão limite, isto é, o peso sustentável é proporcional à área da base de suporte. Partindo destas hipóteses, obtenha o perfil que se pode esperar do tronco da palmeira.

Solução

Seja ρ a densidade do material que é formado a palmeira. Então o peso suportado pela secção de altura h é dado por

$$\int_{h}^{h_0} 2\pi\rho R^2(h)dh,$$

onde $R(h)$ é o raio da secção de altura h.

Modelagem

Área de sustentação: $\pi R^2(h)$.

Área de sustentação: $\pi R^2(h)$.

$$k\pi R^2(h) = \int_h^{h_0} 2\pi\rho R^2(h)dh$$

Modelagem

Área de sustentação: $\pi R^2(h)$.

$$k\pi R^2(h) = \int_h^{h_0} 2\pi\rho R^2(h)dh$$

$$2k\pi R(h)\frac{dR(h)}{dh} = -2\pi\rho R^2(h)$$

Modelagem

Área de sustentação: $\pi R^2(h)$.

$$k\pi R^2(h) = \int_h^{h_0} 2\pi\rho R^2(h)dh$$

$$2k\pi R(h)\frac{dR(h)}{dh} = -2\pi\rho R^2(h)$$

$$\frac{dR}{dh} = -\frac{\rho R}{k}$$

Área de sustentação: $\pi R^2(h)$.

$$k\pi R^2(h) = \int_h^{h_0} 2\pi\rho R^2(h)dh$$

$$2k\pi R(h)\frac{dR(h)}{dh} = -2\pi\rho R^2(h)$$

$$\frac{dR}{dh} = -\frac{\rho R}{k}$$

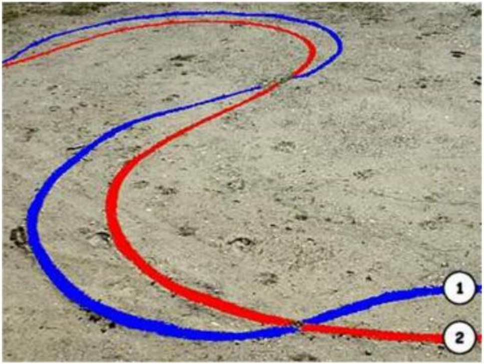
$$R(h) = R_0 exp\left(-\frac{\rho h}{k}\right).$$

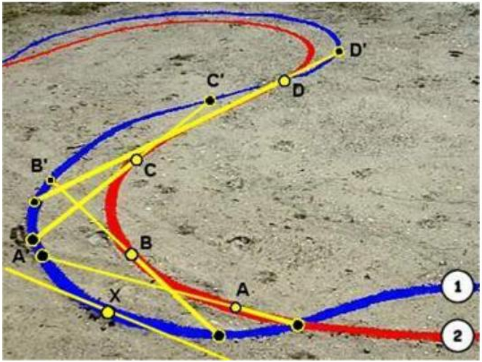
Modelagem

The Path of the Rear Bike Wheel

Modelagem

Modelagem




D'
C'
D
B'
C
B
A'
A
X
1
2

Modelagem

$f(x)$: curva descrita pelo pneu dianteiro.

$r(x)$: curva descrita pelo pneu traseiro.

w: distância entre os eixos.

x_r: distância entre a Origem e $r(x)$ na direção do eixo Ox.

x_f: distância entre a Origem e $f(x)$ na direção do eixo Ox.

y_r: a posição no eixo y do pneu traseiro.

y_f: a posição no eixo y do pneu dianteiro.

$f(x)$: curva descrita pelo pneu dianteiro.

$r(x)$: curva descrita pelo pneu traseiro.

w: distância entre os eixos.

x_r: distância entre a Origem e $r(x)$ na direção do eixo Ox.

x_f: distância entre a Origem e $f(x)$ na direção do eixo Ox.

y_r: a posição no eixo y do pneu traseiro.

y_f: a posição no eixo y do pneu dianteiro.

$$\begin{cases} x_r' = \dfrac{1}{w^2}[x_f'(x_f - x_r)^2 + y_f'(x_f - x_r)(y_f - y_r)] \\ \\ y_r' = \dfrac{1}{w^2}[x_f'(x_f - x_r)(y_f - y_r) + y_f'(y_f - y_r)^2]. \end{cases}$$

$f(x)$: curva descrita pelo pneu dianteiro.

$r(x)$: curva descrita pelo pneu traseiro.

w: distância entre os eixos.

x_r: distância entre a Origem e $r(x)$ na direção do eixo Ox.

x_f: distância entre a Origem e $f(x)$ na direção do eixo Ox.

y_r: a posição no eixo y do pneu traseiro.

y_f: a posição no eixo y do pneu dianteiro.

$$\begin{cases} x_r' = \dfrac{1}{w^2}[x_f'(x_f - x_r)^2 + y_f'(x_f - x_r)(y_f - y_r)] \\ \\ y_r' = \dfrac{1}{w^2}[x_f'(x_f - x_r)(y_f - y_r) + y_f'(y_f - y_r)^2]. \end{cases}$$

Equações Diferenciais

Sejam $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto e $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Considere a equação diferencial ordinária:

$$x' = f(t, x). \qquad (\star)$$

EDOs

Sejam $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto e $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Considere a equação diferencial ordinária:

$$x' = f(t, x). \qquad (\star)$$

Podemos mostrar que $x(t)$ é solução da EDO $(\star)$ definida em um intervalo I satisfazendo a condição $x(t_0) = x_0$, $(t_0, x_0) \in D$, se e só se $x(t)$ é contínua em I, $(t, x(t)) \in D$ para todo $t \in I$ e

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Teorema (Teorema de Peano)

Sejam $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e $(t_0, x_0) \in D$. Então o PVI

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

tem pelo menos uma solução.

Teorema (Teorema de Peano)

Sejam $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e $(t_0, x_0) \in D$. Então o PVI

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

tem pelo menos uma solução.

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Teorema (Teorema de Peano)

Sejam $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e $(t_0, x_0) \in D$. Então o PVI

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

tem pelo menos uma solução.

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Que tipo de integral $\int$???????

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866)

EDOs

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua.

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua.

- $P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$ e denote $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

EDOs

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua.

- $P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$ e denote $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

- $\mathcal{P} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$, com $t_i \in I_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua.

- $P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$ e denote $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

- $\mathcal{P} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$, com $t_i \in I_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

- Soma de Riemann $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$.

EDOs

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua.

- $P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$ e denote $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

- $\mathcal{P} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$, com $t_i \in I_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

- Soma de Riemann $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$.

- $\|\mathcal{P}\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{x_i - x_{i-1}\}$.

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua.

- $P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$ e denote $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

- $\mathcal{P} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$, com $t_i \in I_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

- Soma de Riemann $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$.

- $\|\mathcal{P}\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{x_i - x_{i-1}\}$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Ralph Henstock (1923 - 2007) Jaroslav Kurzweil (1926 -)

- Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função.

EDOs

- Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função.

- A função $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$ é chamada de calibre.

EDOs

- Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função.
- A função $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$ é chamada de calibre.
- Seja $\mathcal{P} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$ uma partição marcada de $[a, b]$.

- Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função.

- A função $\delta : [a,b] \to (0,+\infty)$ é chamada de calibre.

- Seja $\mathcal{P} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$ uma partição marcada de $[a,b]$.

Dizemos $\mathcal{P}$ é $\delta-$fina, com $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, se

$$t_i \in I_i = [x_{i-1}, x_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)], \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Soma de Riemann $S(f, \mathcal{P}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$.

Teorema: Se δ é um calibre sobre o intervalo $[a, b]$, então existe uma partição $\mathcal{P}$ $\delta-$fina de $[a, b]$.

Teorema: Se δ é um calibre sobre o intervalo $[a, b]$, então existe uma partição $\mathcal{P}$ $\delta-$fina de $[a, b]$.

Definição: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é chamada Henstock-Kurzweil integrável em $[a, b]$, se existe $L \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$, existe uma função calibre δ em $[a, b]$ tal que para toda partição marcada $\delta-$fina $\mathcal{P} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$ de $[a, b]$ tem-se

$$\left| \left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right) - L \right| < \epsilon.$$

Notação: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = L.$

- $R[a, b]$: espaço das funções Riemann integráveis em $[a, b]$.

EDOs

- $R[a, b]$: espaço das funções Riemann integráveis em $[a, b]$.
- $HK[a, b]$: espaço das funções Henstock-Kurzweil integráveis em $[a, b]$.

- $R[a, b]$: espaço das funções Riemann integráveis em $[a, b]$.
- $HK[a, b]$: espaço das funções Henstock-Kurzweil integráveis em $[a, b]$.

Teorema Se $f \in HK[a, b]$ então a integrável de f é unicamente determinada.

EDOs

- $R[a, b]$: espaço das funções Riemann integráveis em $[a, b]$.

- $HK[a, b]$: espaço das funções Henstock-Kurzweil integráveis em $[a, b]$.

Teorema Se $f \in HK[a, b]$ então a integrável de f é unicamente determinada.

Teorema Se $f \in R[a, b]$ com integral L, então $f \in HK[a, b]$ com integral L.

Teorema Sejam $f, g \in HK[a,b]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

a) $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$

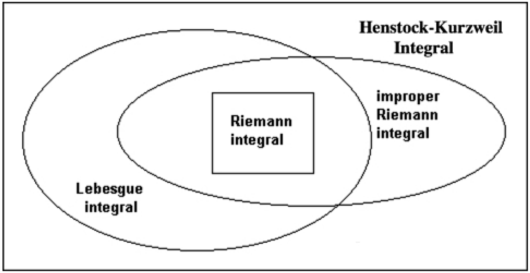
b) $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

c) Se $f(x) \leq g(x)$ em $[a,b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

d) Se $c \in [a,b]$ então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

e) F contínua em $[a,b]$ tal que $F'(x) = f(x)$ a.e. em $[a,b]$. Então

$$f \in HK[a,b] \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$


Henstock-Kurzweil Integral
improper Riemann integral
Riemann integral
Lebesgue integral

- É Riemann integrável (imprópria) mas não é Lebesgue integrável.

$$f(x) = \frac{sen(x)}{x}$$

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|dx = +\infty \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{\pi}{2}.$$

EDOs

- É Riemann integrável (imprópria) mas não é Lebesgue integrável.

$$f(x) = \frac{sen(x)}{x}$$

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|dx = +\infty \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{\pi}{2}.$$

- É Lebesgue integrável mas não é Riemann integrável.

$$g(x) = \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$$

- É Riemann integrável (imprópria) mas não é Lebesgue integrável.

$$f(x) = \frac{sen(x)}{x}$$

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|dx = +\infty \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{\pi}{2}.$$

- É Lebesgue integrável mas não é Riemann integrável.

$$g(x) = \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$$

$h(x) = f(x) + g(x)$ é Henstock-Kurzweil integrável.

Equações Diferenciais Generalizadas

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x, t)$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} DF(x(\tau), s)$$

FIM