

# Método de Quadrados Mínimos: Caso contínuo

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

9 de outubro de 2012

Baseado no livro *Análise Numérica*, de R. L. Burden e J. D. Faires.

# Aproximação de funções

Estamos interessados, agora, em resolver o seguinte problema: dada uma função  $f \in \mathcal{C}[a, b]$ , queremos determinar um polinômio  $P_n(x)$ , de grau máximo  $n$ , de forma que  $P_n(x)$  esteja o mais próximo possível de  $f(x)$ .

Este problema pode ser tratado utilizando o **Método de Quadrados Mínimos**.

Agora que temos de calcular a distância entre duas funções ( $f$  e  $P_n$ ), utilizaremos o erro

$$\int_a^b (f(x) - P_n(x))^2 dx.$$

Assim, o caso contínuo do **Método de Quadrados Mínimos** para este problema consiste encontrar os coeficientes do polinômio de que minimizem este erro.

# Método de Quadrados Mínimos

Como o polinômio é dado por

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k,$$

queremos minimizar

$$E \equiv E(a_0, a_1, \dots, a_n) = \int_a^b \left( f(x) - \sum_{k=0}^n a_kx^k \right)^2 dx.$$

Para isto, devemos igualar as derivadas parciais a 0, ou seja,

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0,$$

para  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Como

$$\begin{aligned} E &= \int_a^b \left( f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k \right)^2 dx = \\ &= \int_a^b (f(x))^2 dx - 2 \int_a^b \sum_{k=0}^n a_k x^k f(x) dx + \int_a^b \left( \sum_{k=0}^n a_k x^k \right)^2 dx = \\ &= \int_a^b (f(x))^2 dx - 2 \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^k f(x) dx + \int_a^b \left( \sum_{k=0}^n a_k x^k \right)^2 dx, \end{aligned}$$

temos que

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2 \int_a^b x^j f(x) dx + 2 \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^{j+k} dx.$$

Portanto, as  $n + 1$  equações normais são dadas por

$$\sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^{j+k} dx = \int_a^b x^j f(x) dx,$$

para  $j = 0, 1, \dots, n$ , e formam um sistema linear.

# Método de Quadrados Mínimos - exemplo

Queremos aproximar a função  $f(x) = \sin(\pi x)$ , no intervalo  $[0, 1]$ , por um polinômio, de grau máximo 2,  $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ .

As equações normais para este problema são:

$$\begin{cases} a_0 \int_0^1 1 dx & + & a_1 \int_0^1 x dx & + & a_2 \int_0^1 x^2 dx & = & \int_0^1 \sin(\pi x) dx, \\ a_0 \int_0^1 x dx & + & a_1 \int_0^1 x^2 dx & + & a_2 \int_0^1 x^3 dx & = & \int_0^1 x \sin(\pi x) dx, \\ a_0 \int_0^1 x^2 dx & + & a_1 \int_0^1 x^3 dx & + & a_2 \int_0^1 x^4 dx & = & \int_0^1 x^2 \sin(\pi x) dx. \end{cases}$$



# Método de Quadrados Mínimos - exemplo

Calculando os coeficientes do sistema, temos

$$\int_0^1 1 dx = x \Big|_0^1 = 1 - 0 = 1,$$

$$\int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}.$$

# Método de Quadrados Mínimos - exemplo

Os termos do lado direito das equações são

$$\int_0^1 \sin(\pi x) dx = -\frac{\cos(\pi x)}{\pi} \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi} - \left(-\frac{1}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi},$$

$$\int_0^1 x \sin(\pi x) dx = \frac{\sin(\pi x) - \pi x \cos(\pi x)}{\pi^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi} - 0 = \frac{1}{\pi},$$

$$\int_0^1 x^2 \sin(\pi x) dx = \frac{(2 - \pi^2 x^2) \cos(\pi x) + 2\pi x \sin(\pi x)}{\pi^3} \Big|_0^1 =$$
$$\frac{\pi^2 - 2}{\pi^3} - \frac{2}{\pi^3} = \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}.$$

Assim, temos de resolver o sistema de equações normais

$$\begin{cases} a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 = \frac{2}{\pi}, \\ \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 = \frac{1}{\pi}, \\ \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{5}a_2 = \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}. \end{cases}$$

A solução deste sistema é dada por

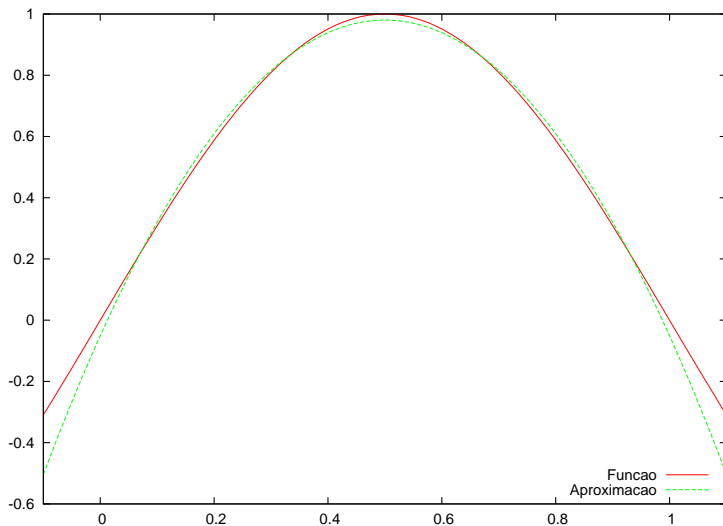
$$a_0 = \frac{12\pi^2 - 120}{\pi^3} \approx -0.050465,$$

$$a_1 = -a_2 = \frac{720 - 60\pi^2}{\pi^3} \approx 4.12251.$$

Portanto, o polinômio de grau máximo 2 que melhor aproxima a função  $f(x) = \sin(\pi x)$ , no sentido de quadrados mínimos, é

$$P_2(x) = -4.12251x^2 + 4.12251x - 0.050465.$$

# Método de Quadrados Mínimos - exemplo



# Método de Quadrados Mínimos

Este exemplo ilustra a dificuldade em obter uma aproximação polinomial por quadrados mínimos.

Os coeficientes do sistema linear são dados por

$$\int_a^b x^{j+k} dx = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1}.$$

A matriz com estes elementos é a conhecida **matriz de Hilbert**. Ela é muito usada para exemplificar problemas numéricos que podem acontecer durante a resolução de sistemas lineares.

Além disso, quando um polinômio de grau até  $n$  é calculado e desejamos calcular o polinômio de grau  $n + 1$ , nenhuma informação pode ser aproveitada.

Existem maneiras de contornar estes problemas, mas eles não serão discutidos no curso.

Outra observação importante é que podemos usar o **Método de Quadrados Mínimos** para aproximar funções usando outros tipos de funções, não apenas polinômios.