Solução Numérica de EDOs

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

25 de outubro de 2012

Baseado nos livros: a) Burden e Faires, b) Franco; c) Arenales e Darezzo

Um exemplo: Arenales e Darezzo, 2008

Sabemos que, em condições normais, uma população de uma certa localidade cresce a uma taxa proporcional ao número de indivíduos.

Sabe-se que após dois anos a população é o dobro da população inicial e após três anos é de vinte mil indivíduos, qual o número de indivíduos da população dessa localidade?

Solução:

Considere:

$N = N(t)$ - número de indivíduos no instante (t);

$N_0 = N(t_0)$ - número de indivíduos no instante (t_0);

Como a taxa de variação da população é proporcional ao número de indivíduos, temos que:

$$\frac{dN}{dt} = KN$$

em que K é uma constante de proporcionalidade.

Solução:

$$\frac{dN}{dt} = KN$$

é uma equação diferencial ordinária, pois relaciona a variável N e sua derivada com relação ao tempo.

A solução analítica é dada por:

$$N(t) = ce^{Kt}$$

pois sua derivada é:

$$\frac{dN(t)}{dt} = Kce^{Kt} = KN(t)$$

Um exemplo: Arenales e Darezzo, 2008

Solução:

$$N(t) = ce^{Kt}$$

Para t $=$ 0, temos que $N(0) = N_0$, logo temos que $c = N_0$ e

$$N(t) = N_0 e^{Kt}$$

Sabemos que a população dobra em 2 anos, logo, para $t = 2$, $N(2) = 2N_0$ e

$$N(2) = N_0 e^{Kt} = 2N_0$$

Logo, $K = 0.3466$.

Solução:

Portanto, temos que:

$$N(t) = N_0 e^{0.3466t}$$

Sabemos que para $t = 3$ a população é igual a 20.000 indivíduos, logo

$$N(3) = N_0 e^{0.3466(3)} = 20.000$$

Portanto, $N_0 = 7.070$

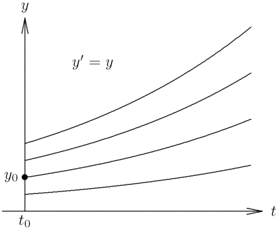
Definição (Arenales e Darezzo, 2008) Uma equação diferencial ordinária de ordem n é uma equação da seguinte forma:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x) ... y^{(n)}(x)) = 0$$

em que estão envolvidas as funções incógnitas $y = y(x)$ e suas derivadas até ordem n, sendo x a variável independente.

Problema do valor inicial (PVI)

Sabemos que a solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = ky$ é dada por $y = y(x) = ce^{kx}$, em que c é uma constante arbitrária. Logo, esta equação diferencial tem infinitas soluções, como ilustra a figura a seguir.



Fonte: slide prof. Carlos Balsa (DM - ESTGB - Portugal)

Se temos que passar por um dado ponto, a solução é única (ver exemplo anterior).

Problema do valor inicial (PVI)

Definição (Arenales e Darezzo, 2008) Um problema de Valor Inicial (PVI) de primeira ordem consiste de uma equação diferencial $y' = f(x, y), x \geq x_0$, e uma condição inicial $y(x_0) = y_0$, onde y_0 é um valor dado, chamado de valor inicial.
Um (PVI) é dado por:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Problema do valor inicial (PVI)

Teorema Considere uma função real $f(x, y)$ contínua no intervalo $a \leq x \leq b$, com a e b finitos e $-\infty < y < \infty$. Se existe uma constante L tal que para todo $x \in [a, b]$ e para todo par (y, y_1) temos: $|f(x, y) - f(x, y_1)| \leq L|y - y_1|$, então existe uma única função $y = y(x)$ satisfazendo as seguintes condições:

a) $y(x)$ é contínua e diferenciável para todo $x \in [a, b]$;

b) $y' = f(x, y(x))$ para todo $x \in [a, b]$;

c) $y(x_0) = y_0$, onde y_0 é um valor conhecido.

Ou seja, a solução do PVI é uma função contínua e diferenciável, que satifaz (b) e passa pelo ponto (x_0, y_0).

Problema do valor inicial (PVI)

O problema do valor inicial também pode ser definido para um sistema de equações diferencias.

Vamos ver métodos numéricos resolver o PVI com uma equação. Estes métodos podem ser estendidos para solução de sistemas.

Resolver numericamente o PVI significa em calcular aproximações para $y = y(x)$ em pontos discretos de um intervalo, ou seja, $x_0, x_1, x_2 ... x_n$ com $x_i \in [a, b]$.

Uma das formas de discretizar o intervalo $[a, b]$ é tomarmos $x_0 = a$ e $x_i = x_0 + hi$, de modo que $x_n = b$, ou seja, $h = \frac{x_n - x_0}{n}$.

Para um dado valor inicial x_0 $(y(x_0) = y_0)$ calculamos os demais valores de y_i.

O erro é dado por: $e(x_i) = y(x_i) - y_i$, em que y_i é o valor real.

Objetivo: obter uma aproximação de um PVI bem enunciado:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

ou

$$y' = f(x, y)$$

em que $a \leq x \leq b$ e $y(a) = \alpha$.

Vamos obter o valor aproximado de $y(x)$ para diferentes valores deste intervalo, chamados de **pontos de rede** ou **pontos de malha**, no intervalo $[a, b]$.

Uma vez obtida a aproximação nos pontos, podemos obter, por exemplo, por interpolação, a solução aproximada em outros pontos do intervalo.

Os pontos considerados são equidistantes, ou seja,

$$x_i = a + ih$$

para $i = 0, 1, 2, \dots, N$.

A distância entre os pontos é chamada de **tamanho do passo** $(h = \frac{b-a}{N})$.

A expansão em série de Taylor para $y(x_i + h)$ em torno do ponto x_i é dada por:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \ldots + \frac{h^q}{q!}y^{(q)}(x_i) + \frac{h^{q+1}}{(q+1)!}y^{(q+1)}(\xi_i)$$

em que $x_i < \xi_i < x_{i+1}$ e $x_{i+1} = x_i + h$.

O último termo é o **erro de truncamento local**.

A partir da série de Taylor obtemos o método de Euler (q $= 1$).

Suponha que $y(x)$ que é a única solução da equação $y' = f(x, y)$ e que ela tem duas derivadas contínuas em $[a, b]$, de modo que para cada ponto $i = 1, 2, \ldots, N$ temos:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + (x_{i+1} - x_i)y'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} y''(\xi_i)$$

para algum número $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Como $x_{i+1} - x_i = h$ temos:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i)$$

Métodos de Euler

Como $y' = f(x, y)$ temos:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i)$$

O método de Euler é dado por:

$$\begin{aligned} & y(x_0) \approx \alpha \\ & y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) \quad i = 0, 1, \ldots, N-1 \quad (I) \end{aligned}$$

A equação (I) é chamada de **equação de diferenças** associada ao método de Euler.

Métodos de Euler: exemplo Burden e Faires, 2003

Utilize o método de Euler para aproximar a solução do PVI

$$y' = y - x^2 + 1 \quad 0 \leq x \leq 2 \quad y(0) = 0.5$$

com $N = 10$.

Métodos de Euler: exemplo Burden e Faires, 2003

Observações:

- o erro do método de Euler aumenta, no pior dos casos, de forma linear.
- este método por não ser suficientemente preciso não é, em geral, utilizado na prática.