Solução Numérica de EDOs

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

30 de outubro de 2012

Baseado nos livros: a) Burden e Faires, b) Franco; c) Arenales e Darezzo

A partir da série de Taylor obtemos o método de Euler (q $= 1$).

Suponha que $y(x)$ que é a única solução da equação $y' = f(x, y)$ e que ela tem duas derivadas contínuas em $[a, b]$, de modo que para cada ponto $i = 1, 2, \ldots, N$ temos:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + (x_{i+1} - x_i)y'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} y''(\xi_i)$$

para algum número $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Como $x_{i+1} - x_i = h$ temos:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i)$$

Como $y' = f(x, y)$ temos:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i)$$

O método de Euler é dado por:

$$\begin{aligned} &y(x_0) \approx \alpha \\ &y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) \quad i = 0, 1, \ldots, N-1 \quad (I) \end{aligned}$$

A equação (I) é chamada de **equação de diferenças** associada ao método de Euler.

Como $y' = f(x, y)$ temos:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i)$$

O erro no método de Euler é dado por:

$$Erro = \frac{h^2}{2} y''(\xi_i)$$

ou ainda:

$$Erro = \frac{Mh^2}{2}$$

em que: $M = max|y''(x)|, x \in [a, b]$

Observações:

- o erro do método de Euler aumenta, no pior dos casos, de forma linear.
- este método por não ser suficientemente preciso não é, em geral, utilizado na prática.

Série de Taylor:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \ldots + \frac{h^{q-1}}{(q-1)!}y^{(q-1)}(x_i) + \frac{h^q}{q!}y^{(q)}(\xi_i)$$

para algum número $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ e como $h = x_{i+1} - x_i$.

Taylor de ordem 1 (Euler)

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i)$$

Taylor de ordem 2

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(\xi_i)$$

Métodos de Taylor de ordem 2 - Exemplo: Arenales e Darezzo, 2008

$$y' = f(x, y) = x - y + 2$$
$$y(x_0) = y(0) = 2$$

Para $x \in [a, b] = [0, 1]$ e com uma discretização de 5 subintervalos, ou seja,

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{1}{5} = 0.2$$

Taylor de ordem 2

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(\xi_i)$$

Métodos de Taylor de ordem 2 - Exemplo: Arenales e Darezzo, 2008

$$
\begin{aligned}
y' &= f(x, y) = x - y + 2 \\
y(x_0) &= y(0) = 2
\end{aligned}
$$

Para $x \in [a, b] = [0, 1]$ e com uma discretização de 5 subintervalos, ou seja,

$$h = \frac{b - a}{N} = \frac{1}{5} = 0.2$$

Taylor de ordem 2

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(\xi_i)$$

Métodos de Taylor de ordem 2 - Exemplo: Arenales e Darezzo, 2008

Precisamos obter y'', temos que $y' = f(x, y) = x - y + 2$, logo

$$y'' = 1 - 1(x - y + 2) = -x + y - 1$$

Portanto,

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + 0.2(x_i - y_i + 2) + \frac{0.2^2}{2!}(-x_i + y_i - 1)$$

Métodos de Taylor de ordem 2 - Exemplo: Arenales e Darezzo, 2008

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + 0.2(x_i - y_i + 2) + \frac{0.2^2}{2!}(-x_i + y_i - 1)$$

i	x_i	y_i	$y' = x_i - y_i + 2$	$y'' = -x_i + y_i - 1$
0	0.0000	2.0000	0.0000	1.0000
1	0.2000	2.0200	0.1800	0.8200
2	0.4000	2.0724	0.3276	0.6724
3	0.6000	2.1514	0.4486	0.5514
4	0.8000	2.2521	0.5479	0.4521
5	1.0000	2.3707	0.6293	0.3707

Método de Taylor de ordem q

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \ldots + \frac{h^q}{q!}y^{(q)}(x_i) + \frac{h^{q+1}}{(q+1)!}y^{(q+1)}(\xi_i)$$

para algum número $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ e como $h = x_{i+1} - x_i$.

1. É conhecido com um **método de 1-passo**, pois este método requer informações apenas do ponto anterior.
2. É também um **método explícito**, pois os termos do lado direito dependem apenas de x_i.

Método de Taylor de ordem q

- Mais importante devido aos conceitos que são introduzidos do que a sua eficiência computacional;
- Desvantagem: requer o cálculo das derivadas de f e a cada passo é preciso avaliar o valor das derivadas no ponto (x_i, y_i)
- nem sempre podemos utilizar o método para qualquer valor de q.

Alternativa: Métodos lineares de passo múltiplo.

Métodos de Runge-Kutta

- mais utilizados pela sua simplicidade e precisão;
- precisão equivalente aos métodos de Taylor;
- vantagem: evitam o cálculo de derivadas de ordem elevada (complexidade analítica, esforço computacional);
- são baseados no cálculo da função $f(x, y)$ em alguns pontos.

O método geral de Runge-Kutta de R-estágios é definido por:

$$y_{i+1} = y_i + h\phi_R(x_i, y_i, h)$$

em que:
$\phi_R(x_i, y_i, h) = c_1 k_1 + c_2 k_2 + \ldots + c_R k_R$
$c_1 + c_2 + \ldots + c_R = 1$

com:

$$\begin{array}{ll}
k_1 = f(x_i, y_i) & \\
k_2 = f(x_i + ha_2, y_i + h(b_{21} k_1)) & a_2 = b_{21} \\
k_3 = f(x_i + ha_3, y_i + h(b_{31} k_1 + b_{32} k_2)) & a_3 = b_{31} + b_{32} \\
k_4 = f(x_i + ha_4, y_i + h(b_{41} k_1 + b_{42} k_2 + b_{43} k_3)) & a_4 = b_{41} + b_{42} + b_{43} \\
\vdots & \\
k_R = f(x_i + ha_R, y_i + h(b_{R1} k_1 + \ldots + b_{4,R-1} k_{R-1})) & a_R = b_{R1} + \ldots + \\
 & \quad + b_{R,R-1}
\end{array}$$

Métodos de Runge-Kutta de ordem 1

Para R = 1, temos:

$$y_{i+1} = y_i + h\phi_1(x_i, y_i, h)$$

em que:

$$\phi_1(x_i, y_i, h) = c_1 k_1$$
$$c_1 = 1$$
$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

ou seja:

$$y_{i+1} = y_i + hk_1 = y_i + hf(x_i, y_i)$$

que coincide com o método de Euler.

Métodos de Runge-Kutta de ordem 2

Para R = 2, temos:

$$y_{i+1} = y_i + h\phi_2(x_i, y_i, h)$$

em que:

$$\phi_2(x_i, y_i, h) = c_1 k_1 + c_2 k_2$$
$$c_1 + c_2 = 1$$
$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + ha_2, y_i + h(b_{21} k_1)) \qquad a_2 = b_{21}$$

Para determinar c_1, c_2 e a_2, vamos utilizar Taylor de ordem 2 para encontrar k_2.

Métodos de Runge-Kutta de ordem 2

Um dos métodos de Runge-Kutta de ordem 2 mais conhecidos é dado por:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i)))$$

que é conhecido como **método de Euler modificado.**

Métodos Previsor-Corretor

Podemos obter outros métodos numéricos para resolver EDOs baseados no teorema fundamental do cálculo:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)dx = y(x_{i+1}) - y(x_i)$$

como $y'(x) = f(x, y(x))$ temos:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx$$

A integral definida pode ser aproximada por diferentes métodos.

Métodos Previsor-Corretor

Aproximando a integral pela regra dos retangulos, temos:

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + hf(x_i, y(x_i))$$

para $h = x_{i+1} - x_i$.

Que é o **método de Euler.**

Métodos Previsor-Corretor

Aproximando a integral pela **regra dos trapézios**, temos:

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + \frac{h}{2}[f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))]$$

para $h = x_{i+1} - x_i$.

Utilizando a aproximação de $y_i \approx y(x_i)$ temos:

$$y_{i+1} \approx y(x_i) + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$

Note que y_{i+1} aparece nos dois lados da expressão acima, logo temos um **método implícito**.

Métodos Previsor-Corretor

Os métodos anteriores, em que y_{i+1} é calculado explicitamente, são chamados **métodos explícitos** e podem ser utilizados para obter uma aproximação do valor de y_{i+1} para os métodos implícitos, estes são os **previsores**.

Por exemplo, podemos obter uma aproximação de $y_{i+1}^{(0)}$ utilizando o método de Euler:

$$y_1^{(0)} = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Previsor:
Por exemplo, podemos obter uma aproximação de $y_{i+1}^{(0)}$ utilizando o método de Euler:

$$y_1^{(0)} = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

e então, usamos o método das aproximações sucessivas: (**corretor**)

$$y_1^{(k+1)} = y_1^{(0)} + \frac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(k)})]$$

para determinar y_1, caso a sequencia $y_1^{(0)}$, $y_1^{(1)}$ ... convergir.

Um critério de parada: erro relativo.

Previsor:
Por exemplo, podemos obter uma aproximação de $y_{i+1}^{(0)}$ utilizando o método de Euler:

$$y_1^{(0)} = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

e então, usamos o método das aproximações sucessivas: (**corretor**)

$$y_1^{(k+1)} = y_1^{(0)} + \frac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(k)})]$$

para determinar y_1, caso a sequencia $y_1^{(0)}$, $y_1^{(1)}$ ... convergir.

Um critério de parada: erro relativo.