Método de Gauss-Seidel

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

3 de setembro de 2012

Baseado no livro Cálculo Numérico, de Neide B. Franco.

Introdução

Como vimos, queremos resolver o sistema linear:

$$Ax = b.$$

Para tanto vamos reescrever o sistema como:

$$x = Bx + g.$$

O Método de Jacobi-Richardson

Supondo que $det(D) \neq 0$, podemos transformar o sistema linear original em:

$$
\begin{aligned}
Ax = &\ b && \Rightarrow \\
(L + D + R)x = &\ b && \Rightarrow \\
Dx = &\ -(L + R)x + b && \Rightarrow \\
x = &\ -D^{-1}(L + R)x + D^{-1}b && ,
\end{aligned}
$$

onde $B = -D^{-1}(L + R)$ e $g = D^{-1}b$.

O processo iterativo definido por

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + R)x^{(k)} + D^{-1}b$$

é chamado de *Método de Jacobi-Richardson*.

O Método de Jacobi-Richardson

Supondo que $det(D) \neq 0$ ($a_{ii} \neq 0$, $i = 1, ..., n$) e dividindo cada linha de A pelo elemento da diagonal, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 1 & a_{23}/a_{22} \\ a_{31}/a_{33} & a_{32}/a_{33} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^* & a_{13}^* \\ a_{21}^* & 1 & a_{23}^* \\ a_{31}^* & a_{32}^* & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21}^* & 0 & 0 \\ a_{31}^* & a_{32}^* & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12}^* & a_{13}^* \\ 0 & 0 & a_{23}^* \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim temos:

$$A^* = L^* + I + R^*.$$

O Método de Jacobi-Richardson

Reescrevendo novamente o sistema, temos:

$$
\begin{aligned}
Ax = &\ b && \Rightarrow \\
A^*x = &\ b^* && \Rightarrow \\
(L^* + I + R^*)x = &\ b^* && \Rightarrow \\
x = &\ -(L^* + R^*)x + b^* && ,
\end{aligned}
$$

onde $B = -(L^* + R^*)$ e $g = b^*$. O processo iterativo fica:

$$x^{(k+1)} = -(L^* + R^*)x^{(k)} + b^*.$$

Convergência

A série converge?

Critério: A série será convergente se, para alguma norma de matrizes, $||B|| < 1$.

O Método de Jacobi-Richardson

$$x^{(k+1)} = -(L^* + R^*)x^{(k)} + b^*$$

pode ser escrito como:

$$\begin{array}{lclllll}
x_1^{(k+1)} & = & 0 & -a_{12}^* x_2^{(k)} & -a_{13}^* x_3^{(k)} \dots & -a_{1n}^* x_n^{(k)} & +b_1^* \\
x_2^{(k+1)} & = & -a_{21}^* x_1^{(k)} & +\ 0 & -a_{23}^* x_3^{(k)} \dots & -a_{2n}^* x_n^{(k)} & +b_2^* \\
x_3^{(k+1)} & = & -a_{31}^* x_1^{(k)} & -a_{32}^* x_2^{(k)} & +\ 0\ \dots & -a_{3n}^* x_n^{(k)} & +b_3^* \\
\dots & & & & & & \\
x_n^{(k+1)} & = & -a_{n1}^* x_1^{(k)} & -a_{n2}^* x_2^{(k)} & \dots & -a_{n,n-1}^* x_{n-1}^{(k)} & +b_n^*
\end{array}$$

O Método de Gauss-Seidel

Transformando o sistema:

$$(L^* + I + R^*)x = b^*.$$

em:

$$(L^* + I)x = -R^*x + b^*$$

$$x = -(L^* + I)^{-1}R^*x + (L^* + I)^{-1}b^*$$

O processo iterativo definido por:

$$x^{(k+1)} = -(L^* + I)^{-1}R^*x^{(k)} + (L^* + I)^{-1}b^*$$

é chamado de *Método de Gauss-Seidel*.

O Método de Gauss-Seidel

Observe que multiplicando:

$$x^{(k+1)} = -(L^* + I)^{-1} R^* x^{(k)} + (L^* + I)^{-1} b^*$$

por $(L^* + I)$ temos:

$$(L^* + I) x^{(k+1)} = -R^* x^{(k)} + b^*$$

ou ainda:

$$x^{(k+1)} = -L^* x^{(k+1)} - R^* x^{(k)} + b^*$$

O Método de Gauss-Seidel

$$x^{(k+1)} = -L^* x^{(k+1)} - R^* x^{(k)} + b^*$$

pode ser escrito como:

$$\begin{array}{lllllll}
x_1^{(k+1)} & = & 0 & -a_{12}^* x_2^{(k)} & -a_{13}^* x_3^{(k)} \ldots & -a_{1n}^* x_n^{(k)} & +b_1^* \\
x_2^{(k+1)} & = & -a_{21}^* x_1^{(k+1)} & +\ 0 & -a_{23}^* x_3^{(k)} \ldots & -a_{2n}^* x_n^{(k)} & +b_2^* \\
x_3^{(k+1)} & = & -a_{31}^* x_1^{(k+1)} & -a_{32}^* x_2^{(k+1)} & +\ 0\ \ldots & -a_{3n}^* x_n^{(k)} & +b_3^* \\
\ldots & & & & & & \\
x_n^{(k+1)} & = & -a_{n1}^* x_1^{(k+1)} & -a_{n2}^* x_2^{(k+1)} & \ldots & -a_{n,n-1}^* x_{n-1}^{(k+1)} & +b_n^*
\end{array}$$

O Método de Gauss-Seidel

Note que as componentes $x^{(k+1)}$ podem ser calculadas sucessivamente sem a necessidade de se calcular $(L^* + I)^{-1}$.

Observe também que usamos para o cálculo de uma componente de $x^{(k+1)}$ o valor mais recente das demais componentes. Por esse motivo o método de Gauss-Seidel também é conhecido por *Método dos Deslocamentos Sucessivos*.

Esse método difere de Jacobi-Richardson por utilizar no cálculo de uma componente de $x^{(k+1)}$ o valor mais recente das demais componentes.

Exemplo

Resolva o sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8, \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

pelo Método de Gauss-Seidel com $x^{(0)} = (0.7, -1.6, 0.6)^T$, até encontrar

um erro de 10^{-2}.

A série converge?

Critério: A série será convergente se, para alguma norma de matrizes, $||B|| < 1$.

Qual é a B no método de Gauss-Seidel?

$$B = -(L^* + I^*)^{(-1)}R^*$$

Veremos na próxima aula o critério de Sassenfeld.