Método de Gauss-Seidel: Convergência

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

3 de setembro de 2012

Baseado no livro Cálculo Numérico, de Neide B. Franco.

O Método de Gauss-Seidel

$$x^{(k+1)} = -L^* x^{(k+1)} - R^* x^{(k)} + b^*$$

pode ser escrito como:

$$\begin{array}{lclllll}
x_1^{(k+1)} & = & 0 & -a_{12}^* x_2^{(k)} & -a_{13}^* x_3^{(k)} \ldots & -a_{1n}^* x_n^{(k)} & +b_1^* \\
x_2^{(k+1)} & = & -a_{21}^* x_1^{(k+1)} & +\ 0 & -a_{23}^* x_3^{(k)} \ldots & -a_{2n}^* x_n^{(k)} & +b_2^* \\
x_3^{(k+1)} & = & -a_{31}^* x_1^{(k+1)} & -a_{32}^* x_2^{(k+1)} & +\ 0\ \ldots & -a_{3n}^* x_n^{(k)} & +b_3^* \\
\ldots & & & & & & \\
x_n^{(k+1)} & = & -a_{n1}^* x_1^{(k+1)} & -a_{n2}^* x_2^{(k+1)} & \ldots & -a_{n,n-1}^* x_{n-1}^{(k+1)} & +b_n^*
\end{array}$$

Convergência

A série converge?

Critério: A série será convergente se, para alguma norma de matrizes, $||B|| < 1$.

Qual é a B no método de Gauss-Seidel?

$$B = -(L^* + I^*)^{(-1)} R^*$$

Normas consistentes

Definição: se uma norma de matriz e uma norma de vetor estão relacionadas de tal forma que a desigualdade

$$||Ax|| \leq ||A||||x||$$

é satisfeita para qualquer x, então dizemos que as duas normas são **consistentes**.

obs. a norma infinito para matrizes e a norma infinito para vetores são consistentes.

Convergência

Logo, temos que:

$$||Bx|| \leq ||B||||x||$$

Se $||B|| \leq k$ temos que

$$||Bx|| \leq ||B||||x|| \leq k||x||$$

impondo que $k < 1$ teremos que

$$||B|| < 1$$

Convergência

Seja

$$y = Bx$$

Para o método de Gauss-Seidel, sabemos que:

$$B = -(L^* + I)^{-1} R^*$$

Logo,

$$y = -(L^* + I)^{-1} R^* x$$

$$(L^* + I)y = -R^* x$$

$$y = -L^* y - R^* x$$

Convergência

Dado que $y = -L^*y - R^*x$ podemos escrever que:

$$
\begin{array}{lccccc}
y_1 = & -a^*_{12}x_2 & -a^*_{13}x_3 & -a^*_{14}x_4 & -\ldots & -a^*_{1n}x_n \\
y_2 = & -a^*_{21}y_1 & -a^*_{23}x_3 & -a^*_{24}x_4 & -\ldots & -a^*_{2n}x_n \\
y_3 = & -a^*_{31}y_1 & -a^*_{32}y_2 & -a^*_{34}x_4 & -\ldots & -a^*_{2n}x_n \\
\vdots & & & & & \\
y_n = & -a^*_{n1}y_1 & -a^*_{n2}y_2 & -a^*_{n3}y_3 & -\ldots & -a^*_{n,n-1}y_n
\end{array}
$$

Queremos calcular $||Bx||_\infty$ e sabemos que $||Bx||_\infty = ||y||_\infty$, ou seja,

$$||Bx|| = max_{1 \leq i \leq n}|y_i|$$

Convergência

Sabemos que:

$|y_1| = |-a^*_{12}x_2 - a^*_{13}x_3 - a^*_{14}x_4 - \ldots - a^*_{1n}x_n|$

$|y_1| = |\sum_{j=2}^{n} -a^*_{1j}x_j|$

$|y_1| \leq \sum_{j=2}^{n} |-a^*_{1j}x_j| \leq \sum_{j=2}^{n} |a^*_{1j}||x_j|$

$|y_1| \leq \sum_{j=2}^{n} |a^*_{1j}| \; max_j|x_j| = \sum_{j=2}^{n} |a^*_{1j}| \; ||x||_\infty$

$$|y_1| \leq \beta_1 ||x||_\infty \qquad \text{em que } \beta_1 = \sum_{j=2}^{n} |a^*_{1j}|$$

Calculando $|y_2|$:

$$|y_2| = |-a^*_{21}y_1 - a^*_{23}x_3 - a^*_{24}x_4 - ... - a^*_{1n}x_n|$$

$$|y_2| = |-a^*_{21}y_1 + \sum_{j=3}^{n} -a^*_{2j}x_j|$$

$$|y_2| \leq |-a^*_{21}y_1| + \sum_{j=3}^{n} |-a^*_{2j}x_j| \leq |a^*_{21}|\ |y_1| + \sum_{j=3}^{n} |a^*_{2j}||x_j|$$

$$|y_2| \leq |a^*_{21}|\ \beta_1\ ||x||_\infty + \sum_{j=3}^{n} |a^*_{2j}|\ max_j|x_j|$$
$$|y_2| \leq |a^*_{21}|\ \beta_1\ ||x||_\infty + \sum_{j=3}^{n} |a^*_{2j}|\ ||x||_\infty$$

$$|y_2| \leq \beta_2||x||_\infty \qquad \text{em que } \beta_2 = |a^*_{21}|\beta_1 + \sum_{j=3}^{n} |a^*_{2j}|$$

Convergência

Calculando $|y_i|$:

$$|y_i| = | - a^*_{i1} y_1 - a^*_{i2} y_2 - \ldots - a^*_{i,i-1} y_{i-1} - a^*_{i,i+1} x_{i+1} - \ldots - a^*_{in} x_n|$$

$$|y_i| = | \sum_{j=1}^{i-1} -a^*_{ij} y_j + \sum_{j=i+1}^{n} -a^*_{ij} x_j| \leq \sum_{j=1}^{i-1} | - a^*_{ij} y_j| + \sum_{j=i+1}^{n} | - a^*_{ij} x_j|$$

$$|y_i| \leq \sum_{j=1}^{i-1} | - a^*_{ij}| \, |y_j| + \sum_{j=i+1}^{n} | - a^*_{ij}| \, |x_j|$$

$$|y_i| \leq \sum_{j=1}^{i-1} | - a^*_{ij}| \, \beta_j \, ||x||_\infty + \sum_{j=i+1}^{n} | - a^*_{ij}| \, max_j |x_j|$$

$$|y_i| \leq \sum_{j=1}^{i-1} | - a^*_{ij}| \, \beta_j \, ||x||_\infty + \sum_{j=i+1}^{n} | - a^*_{ij}| \, ||x||_\infty$$

Convergência

Portanto:

$$|y_i| \leq \beta_i ||x||_\infty$$

em que: $\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}^*|\beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}^*|$.

Convergência

Sabemos que:

- $||Bx||_\infty = ||y||_\infty = max_{1 \le i \le n}|y_i| \le max_{1 \le i \le n}\ \beta_i ||x||_\infty$
- $||Bx||_\infty \le ||B||_\infty ||x||_\infty$

logo, como $||Bx||_\infty \le k||x||_\infty$ temos que

$$||B||_\infty \le max_{1 \le i \le n}\ \ \beta_i$$

em que: $\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} |a^*_{ij}|\beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a^*_{ij}|.$

Convergência

Se

$$max_{1 \leq i \leq n} \ \beta_i < 1$$

teremos que: $||B||_\infty < 1$ e, portanto, estará satisfeita uma condição suficiente de convergência.

Este é o critério de Sassenfeld.

Critérios de Convergência

O método de Gauss-Seidel converge se:

a) o critério de **Sassenfeld** for satisfeito, ou seja, seja

$$max_{1 \leq i \leq n} \; \beta_i < 1$$

em que: $\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} |a^*_{ij}|\beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a^*_{ij}|$.

b) o critério das linhas for satisfeito, ou seja, seja

$$max_{1 \leq i \leq n} \; \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a^*_{ij}| < 1$$

c) se a matriz dos coeficientes for estritamente diagonal dominante.

Exemplo

Resolva o sistema linear abaixo pelo método de Gauss-Seidel, com *erro* $< 10^{-2}$.

$$\begin{array}{llll} 5x_1 & +1x_2 & +1x_3 & = 5 \\ 3x_1 & +4x_2 & +1x_3 & = 6 \\ 3x_1 & +3x_2 & +6x_3 & = 0 \end{array}$$

Solução: verificando a convergência:

- A matriz não é estritamente dominante;
  FALHA
- pelo critério das linhas
  $max_{1 \leq i \leq n} \; \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a^*_{ij}| = max\{0.4, 1.0, 1.0\} = 1.0 \nless 1$
  FALHA
- Critério de Sassenfeld

Exemplo

Critério de Sassenfel:

$$max_{1 \leq i \leq n} \;\; \beta_i < 1$$

em que $\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}^*| \; \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}^*|$

$$\begin{array}{llll} 5x_1 & +1x_2 & +1x_3 & = 5 \\ 3x_1 & +4x_2 & +1x_3 & = 6 \\ 3x_1 & +3x_2 & +6x_3 & = 0 \end{array} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.20 & 0.20 \\ 0.75 & 1.00 & 0.25 \\ 0.50 & 0.50 & 1.00 \end{pmatrix}$$

$\beta_1 = 0.20 + 0.20 = 0.40$ $\qquad$ $\beta_2 = |0.75| \; 0.40 + 0.25 = 0.55$
$\beta_3 = |0.50| \; 0.40 + |0.50| \; 0.55 = 0.475$

$max\{0.40, 0.55, 0.475\} = 0.55 < 1.0$

Logo, segundo este critério o método de Gauss-Seidel converge!

Exemplo

$$
\begin{array}{lcccc}
x_1^{(k+1)} & = & -0.20x_2^{(k)} & -0.20x_3^{(k)} & +1.00 \\
x_2^{(k+1)} & = & -0.75x_1^{(k+1)} & -0.25x_3^{(k)} & +1.50 \\
x_3^{(k+1)} & = & -0.50x_1^{(k+1)} & -0.50x_2^{(k+1)} & +0.00
\end{array}
$$

A partir de $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, temos $x^{(1)} =$

$$
\begin{array}{lclll}
x_1^{(1)} & = & 1.000 & & \\
x_2^{(1)} & = & -0.750(1.000) & +1.500 & = 0.750 \\
x_3^{(1)} & = & -0.500(1.000) & -0.500(0.750) & = -0.875
\end{array}
$$

O erro relativo é igual a: $\frac{||x^{(1)}-x^{(0)}||_\infty}{||x^{(1)}||_\infty} = \frac{1.000}{1.000} = 1.000 > 0.01$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= -0.200(0.750) \quad -0.200(-0.875) \quad +1.000 = 1.025\\
x_2^{(2)} &= -0.750(1.025) \quad -0.250(-0.875) \quad +1.500 = 0.950\\
x_3^{(2)} &= -0.500(1.025) \quad -0.500(0.950) \quad = -0.9875
\end{aligned}
$$

O erro relativo é igual a: $\frac{||x^{(2)} - x^{(1)}||_\infty}{||x^{(2)}||_\infty} = \frac{0.2}{1.025} = 0.1951 > 0.01$

...