SME0300 - Cálculo Numérico

Segundo semestre de 2012

Lista de Exercícios: Gabarito

Exercícios de prova

1. Dentre os métodos que você estudou no curso para resolver sistemas lineares, qual é o mais adequado para resolver os sistemas $Ay = x$ que são utilizados no Método das Potência Inversas para calcular o menor autovalor em módulo da matriz A. Justifique sua resposta.

   Resposta:

   Utilizaria a decomposição LU. Isto torna a resolução dos sistemas lineares mais eficiente, já que a decomposição é realizada uma única vez e depois pode ser utilizada em todo o método.

2. Uma função $f(x)$ é dada pelos pontos da tabela:

x	2	3	5	6
$f(x)$	4	5	7	9

   Calcule o valor aproximado da integral desta função utilizando o Método dos Trapézios ou dos Trapézios Repetidos.

   Resposta:

   Como os pontos em que a função é conhecida não são igualmente espaçados, não podemos utilizar o Método dos Trapézios Repetidos diretamente. Logo, calculamos a integral aplicando o Método do Trapézio a cada par de pontos, ou seja:

$$\begin{aligned}\int_2^6 f(x)dx &\approx \tfrac{1}{2}(f(2)+f(3)) + \tfrac{2}{2}(f(3)+f(5)) + \tfrac{1}{2}(f(5)+f(6)) \\ &= \tfrac{1}{2}(4+5) + (5+7) + \tfrac{1}{2}(7+9) \\ &= 4.5 + 12 + 8 \\ &= 24.5\end{aligned}$$

3. Considere a matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}.$$

   Para quais valores de α pode-se garantir a convergência dos Métodos de Jacobi-Richardson e Gauss-Seidel? Baseado em quais critérios?

Resposta:

Primeiramente, vamos analisar a convergência para o **Método de Jacobi-Richardson** *usando o Critério da Diagonal Dominante.*

Para satisfazer a este critério, temos que $\alpha > 1$ e $\alpha < 2$. Logo, o método converge para qualquer valor de α entre 1 e 2 ($1 < \alpha < 2$).

Não é necessário, mas vamos também estudar a convergência usando o Critério das Linhas e o Critério das Colunas.

A matriz B do **Método de Jacobi-Richardson** *(para o exercício) é dada por:*

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha} \\ \frac{\alpha}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Pelo Critério das Linhas, temos que $\frac{1}{\alpha} < 1$ e $\frac{\alpha}{2} < 1$. Logo, escolhendo qualquer valor de α entre 1 e 2 ($1 < \alpha < 2$) a convergência é garantida.

O mesmo se aplica ao Critério das Colunas.

Agora vamos analisar a convergência para o **Método de Gauss-Seidel**.

Sabemos que o Critério da Diagonal Dominante e o Critério das Linhas também são válidos para este método. Logo, para todo valor de $\alpha \in (1, 2)$, este método converge.

Analisemos também o Critério de Sassenfeld:

$\beta_1 = a^*_{12} = \frac{1}{\alpha}$

$\beta_2 = a^*_{21}\beta_1 = \frac{\alpha}{2} * \frac{1}{\alpha} = 1/2$

$\max\{\beta_1, \beta_2\} = \max\{\frac{1}{\alpha}, 1/2\} < 1$

Portanto, para todo $\alpha > 1$, o método converge.

4. Considere a equação $f(x) = 2x^2 - 5x + 2 = 0$, cujas raízes são $x_1 = 0.5$ e $x_2 = 2$. Considere ainda os dois processos iterativos

$$x_{k+1} = \frac{2x_k^2 + 2}{5} \quad \text{e} \quad x_{k+1} = \sqrt{\frac{5x_k}{2} - 1}.$$

Qual dos dois processos iterativos você utilizaria para obter a raiz x_1? Justifique sua escolha.

Resposta:

Primeiramente, vamos analisar o primeiro processo iterativo.

Tomemos o intervalo $[0, 1]$. Sabemos que $g_1(x) = \frac{2x^2+2}{5}$ é uma função contínua e crescente neste intervalo e que $g_1(x) \in [0, 1]$ para todo $x \in [0, 1]$. Além disso, $|g_1'(x)| < 1$ ($g_1{}'(x) = \frac{4}{5}x$) para todo $x \in [0, 1]$. Logo, dado um ponto inicial $x_0 \in [0, 1]$, este processo iterativo converge para x_1.

Agora, vamos analisar o segundo processo iterativo.

A derivada de $g_2(x)$ é dada por

$$g_2'(x) = \frac{5}{4\sqrt{\frac{5x}{2} - 1}}.$$

Note que $g_2'(x_1) = g_2'(0.5) = 2.5$. Logo, não podemos garantir a convergência deste processo iterativo para x_1.

Portanto, para obter a raiz x_1 de $f(x)$ devemos escolher o primeiro processo iterativo.

5. Dados dois pontos $A = (a_x, a_y)$ e $B = (b_x, b_y)$ no plano, a distância Euclidiana $d(A, B)$ entre eles é dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2}.$$

Escreva as equações correspondentes a encontrar um ponto (x, y) que tenha distância 2 dos pontos $(2, 1)$ e $(1, 3)$.

Resposta:

Considere $P_1 = (2, 1)$ e $P_2 = (1, 3)$, e seja $P = (x, y)$ o ponto que queremos encontrar.

A distância entre P_1 e P é dada por

$$d(P_1, P) = \sqrt{(2 - x)^2 + (1 - y)^2}.$$

Sabemos também que $d(P_1, P) = 2$, ou seja,

$$2 = \sqrt{(2 - x)^2 + (1 - y)^2}.$$

Do mesmo modo, sabemos que a distância entre P_2 e P é dada por

$$d(P_2, P) = \sqrt{(1 - x)^2 + (3 - y)^2}.$$

Sabemos também que $d(P_2, P) = 2$, ou seja,

$$2 = \sqrt{(1 - x)^2 + (3 - y)^2}.$$

Logo, para encontrar o ponto P que tenha distância 2 dos pontos P_1 e P_2, devemos resolver o sistema de equações não-lineares dado por

$$\begin{cases} \sqrt{(2 - x)^2 + (1 - y)^2} = 2, \\ \sqrt{(1 - x)^2 + (3 - y)^2} = 2. \end{cases}$$

6. Usando as equações definidas na questão anterior, utilize um método visto no curso para encontrar o ponto (x, y).

Resposta:

Podemos utilizar, para resolver este problema, o Método Iterativo Linear ou o Método de Newton para solução de sistemas não-lineares.

Escolhemos utilizar o Método de Newton. Vamos denotar por x_k^T *o ponto* (x_k, y_k),

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2} - 2 \\ \sqrt{(1-x)^2 + (3-y)^2} - 2 \end{pmatrix},$$

$J_F(x_k)$ *o Jacobiano da função* F *em* x_k. *Usaremos o ponto inicial* $x_0 = (0,0)^T$, *tolerância* 10^{-3} *e norma Euclidiana (quando for necessário usar alguma norma).*

Assim, temos

$$x_0 = (0.0000, 0.0000)^T \quad e \quad F(x_0) = (0.2361, 1.1623)^T.$$

Como $\|F(x_0)\|_2 = 1.1860 > 10^{-3}$, *vamos calcular*

$$J_F(x_0) = \begin{pmatrix} -0.8944 & -0.4472 \\ -0.3162 & -0.9487 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema $J_F(x_0)d_0 = F(x_0)$, *temos* $d_0 = (0.4184, -1.3646)^T$. *Assim,*

$$x_1 = x_0 - d_0 = (-0.4184, 1.3646)^T.$$

Calculando os erros absoluto e relativo, temos

$$\|x_0 - x_1\|_2 = 1.4273 > 10^{-3} \quad e \quad \frac{\|x_0 - x_1\|_2}{\|x_1\|_2} = 1.0000 > 10^{-3}.$$

Vamos, agora, calcular a função F *no ponto* x_1. *Temos que* $F(x_1) = (0.4457, 0.1648)^T$ *e* $\|F(x_1)\|_2 = 0.4752 > 10^{-3}$.

O Jacobiano de F *em* x_1 *é dado por*

$$J_F(x_1) = \begin{pmatrix} -0.9888 & 0.1491 \\ -0.6552 & -0.7555 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema $J_F(x_1)d_1 = F(x_1)$, *temos* $d_1 = (-0.4277, 0.1528)^T$. *Assim,*

$$x_2 = x_1 - d_1 = (0.0093, 1.2118)^T.$$

Calculando os erros absoluto e relativo, temos

$$\|x_1 - x_2\|_2 = 0.4542 > 10^{-3} \quad e \quad \frac{\|x_1 - x_2\|_2}{\|x_2\|_2} = 0.3748 > 10^{-3}.$$

Vamos, então, calcular a função F no ponto x_2. Temos que $F(x_2) = (0.0019, 0.0443)^T$ e $\|F(x_2)\|_2 = 0.0443 > 10^{-3}$.

O Jacobiano de F em x_2 é dado por

$$J_F(x_2) = \begin{pmatrix} -0.9944 & 0.1058 \\ -0.4846 & -0.8747 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema $J_F(x_2)d_2 = F(x_2)$, temos $d_2 = (-0.0069, -0.0468)^T$. Assim,

$$x_3 = x_2 - d_2 = (0.0162, 1.2586)^T.$$

Calculando os erros absoluto e relativo, temos

$$\|x_2 - x_3\|_2 = 0.0473 > 10^{-3} \quad e \quad \frac{\|x_2 - x_3\|_2}{\|x_3\|_2} = 0.0376 > 10^{-3}.$$

Vamos, então, calcular a função F no ponto x_3. Temos que $F(x_3) = (0.0006, 0.0001)^T$. Como $\|F(x_3)\|_2 = 0.0006 < 10^{-3}$, paramos com x_3 como solução.

Portanto, um ponto que tem distância (aproximadamente) 2 tanto de $(2, 1)$ como de $(1, 3)$ é $(0.0162, 1.2586)$.

7. A determinação da área da seção reta de rios e lagos é importante em projetos de prevenção de enchentes (para o cálculo da vazão da água) e nos projetos de reservatórios (para o cálculo do volume total de água). A menos que dispositivos tipo sonar sejam usados na obtenção do perfil do fundo de rios e lagos, o engenheiro civil deve trabalhar com valores da profundidade, obtidos em pontos discretos da superfície. Um exemplo típico da seção reta de um rio é mostrado na figura a seguir.

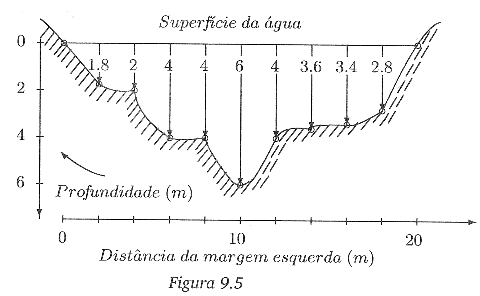

Figura 1: Fonte: Franco, 2006.

Escolha um dos métodos vistos no curso para aproximar a área da seção reta da figura dada. Justifique a escolha do método.

Resposta:

Para definir a área da seção, pode ser utilizado algum método de integração numérica. Dentre os vistos no curso, escolheria a Regra 1/3 de Simpson, que é tão simples quanto a Regra dos Trapézios Repetidos e gera um erro menor.

Extraindo os dados do gráfico temos:

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
f(x)	0	1.8	2	4	4	6	4	3.6	3.4	2.8	0

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

Note que a distância entre os pontos do intervalo de medição é de 2 metros ($h = 2$). Logo,

$$\int_0^{20} f(x)dx = \int_0^4 f(x)dx + \int_4^8 f(x)dx + \int_8^{12} f(x)dx$$

Utilizando a Regra 1/3 de Simpson, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^{20} f(x)dx &\approx \tfrac{2}{3}((0+4*1.8+2)+(2+4*4+4)+ \\ & (4+4*6+4)+(4+4*3.6+3.4)+(3.4+4*2.8+0)) \\ &= \tfrac{2}{3}(9.2+22+32+21.8+14.6) \\ &= \tfrac{2}{3}(99.6) \\ &= 66.4 \end{aligned}$$

Que é a área aproximada da seção do rio.

8. Suponha que você precise resolver o problema da questão anterior usando apenas 4 dos pontos descritos. Quais pontos você escolheria? E qual método seria mais adequado para resolver o problema. Justifique suas escolhas.

   Resposta:

   Dados os pontos

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
f(x)	0	1.8	2	4	4	6	4	3.6	3.4	2.8	0

   escolheria os pontos extremos ($x = 0$) e ($x = 20$), por definirem as extremidades da seção. Resta a escolha de 2 pontos. A partir das 10 medições dadas, escolheria certamente o ponto $x = 10$, que apresenta maior profundidade. E o ponto $x = 14$, pois neste lado do rio o terreno é mais irregular, tornando o cálculo mais preciso com a adição de um ponto.

   Temos 4 pontos que não estão igualmente espaçados, logo não é possível aplicar as regras: 1/3 Simpson e Trapézios Repetidos. Portanto, dentre os métodos que aprendemos, podemos utilizar o Método do Trapézio aplicado a cada par de pontos.

9. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = xy - y^2 + 1, & \\ y(0) = 1, & x \in [0, 0.2], \quad h = 0.05 \end{cases}$$

   usando:

(a) o Método de Euler;

(b) o Método $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$, fazendo duas correções em cada iteração;

(c) o Método Runge-Kutta de Segunda Ordem.

Resposta:

(a) Método de Euler

Fórmula:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h * f(x_i, y(x_i)).$$

Aplicando o Método de Euler, temos os valores aproximados de y_i *(*$i = 1, 2, 3, 4$*):*

x_0	$= 0.0000$
y_0	$= 1.0000$
x_1	$= 0.0500$
y_1	$= 1.0000 + h * f(x_0, y_0)$
	$= 1.0000$
x_2	$= 0.1000$
y_2	$= 1.0000 + h * f(x_1, y_1)$
	$= 1.0025$
x_3	$= 0.1500$
y_3	$= 1.0025 + h * f(x_2, y_2)$
	$= 1.0073$
x_4	$= 0.2000$
y_4	$= 1.0073 + h * f(x_3, y_3)$
	$= 1.0141$

(b) Método Previsor-Corretor

Como o Método Previsor não foi especificado, vamos utilizar o Método de Euler para este fim, cujos valores foram calculados na parte (a) desta questão.

Previsor: $y(x_{i+1}) = y(x_i) + h * f(x_i, y(x_i))$.

Corretor: $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$.

Aplicando o Método Previsor-Corretor (definido acima), temos os valores aproximados de y_i *(*$i = 1, 2, 3, 4$*):*

x_0	$= 0.0000$
y_0	$= 1.0000$
x_1	$= 0.0500$
y_1	$= 1.0000 (Euler)$
$y_1^{(1)}$	$= y_0 + \frac{h}{2}(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1))$
	$= 1.00115$
$y_1^{(2)}$	$= 1.00119$
x_2	$= 0.10000$
y_2	$= 1.00357 (Euler)$
$y_2^{(1)}$	$= y_1 + \frac{h}{2}(f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2))$
	$= 1.00471$
$y_2^{(2)}$	$= 1.00466$
x_3	$= 0.15000$
y_3	$= 1.00922 (Euler)$
$y_3^{(1)}$	$= y_2 + \frac{h}{2}(f(x_2, y_2) + f(x_3, y_3))$
	$= 1.01026$
$y_3^{(2)}$	$= 1.01021$
x_4	$= 0.20000$
y_4	$= 1.01676 (Euler)$
$y_4^{(1)}$	$= y_3 + \frac{h}{2}(f(x_3, y_3) + f(x_4, y_4))$
	$= 1.01772$
$y_4^{(2)}$	$= 1.01768$

(c) Método Runge-Kutta de Segunda Ordem

Fórmula:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h * f(x_i, y_i))).$$

Aplicando o Método Runge-Kutta de Segunda Ordem, temos os valores aproximados de y_i ($i = 1, 2, 3, 4$):

$$
\begin{array}{ll}
\hline
x_0 & = 0.00000 \\
y_0 & = 1.00000 \\
\hline
x_1 & = 0.05000 \\
y_1 & = y_0 + \frac{h}{2}(f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + h * f(x_0, y_0))) \\
 & = 1 + 0.0025 * (f(0,1) + f(0.05, 1 + 0.05 * f(0,1)) \\
 & = 1.00125 \\
\hline
x_2 & = 0.10000 \\
y_2 & = y_1 + \frac{h}{2}(f(x_1, y_1) + f(x_1 + h, y_1 + h * f(x_1, y_1))) \\
 & = 1.00363 \\
\hline
x_3 & = 0.15000 \\
y_3 & = y_2 + \frac{h}{2}(f(x_2, y_2) + f(x_2 + h, y_2 + h * f(x_2, y_2))) \\
 & = 1.00829 \\
\hline
x_4 & = 0.20000 \\
y_4 & = y_3 + \frac{h}{2}(f(x_3, y_3) + f(x_3 + h, y_3 + h * f(x_3, y_3))) \\
 & = 1.01504 \\
\hline
\end{array}
$$

10. Verifique se as afirmações a seguir são Verdadeiras ou Falsas. Justifique suas respostas.

(a) Se $\|B\| > 1$ para alguma norma $\|.\|$, então o método iterativo $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$ para solução de um sistema linear diverge.

Resposta: Falsa.
Pois se $\|B\| < 1$ para alguma norma $\|.\|$, o método converge.
Pois se $\|B\| > 1$ para toda norma $\|.\|$, o método não tem garantia de convergência.

(b) O Método das Potências é aplicável sempre que existe um autovalor real que, em valor absoluto, é maior que os demais.

Resposta: Falsa.
Pois além disso, os autovetores devem ser L.I.

(c) O Método de Jacobi pode ser usado para calcular (aproximadamente) todos os autovalores de uma matriz simétrica, mas não fornece os autovetores correspondentes.

Resposta: Falsa.
O Método de Jacobi fornece uma aproximação para todos os autovalores e autovetores de um matriz simétrica.

(d) É possível aproximar uma função, dada por alguns pontos, por um polinômio. Esta aproximação pode ser feita por polinômios interpoladores ou por quadrados mínimos. No entanto, a aproximação obtida por interpolação é sempre pior do que a aproximação obtida por quadrados mínimos.

Resposta: Falsa.
A diferença entre interpolação polinomial e quadrados mínimos é que, no primeiro caso, o

polinômio passa pelos pontos dados e, no segundo caso, o polinômio passa o "mais perto possível"dos pontos dados.

(e) Dados alguns pontos no plano, é possível calcular um polinômio interpolador destes pontos. Os polinômios obtidos pela interpolação polinomial de Lagrange e o Método de Diferenças Divididas de Newton podem ser diferentes.

Resposta: Falsa.
O polinômio interpolador é único.