SME0300 - Cálculo Numérico

Segundo semestre de 2012

Lista de Exercícios

Exercícios básicos

1. Considere o sistema $Ax = b$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$$

   Sabendo que o sistema abaixo é equivalente a $Ax = b$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 = 4, \\ - x_2 - x_3 - 5x_4 = -7, \\ - 4x_2 - x_3 - 7x_4 = -15, \\ 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8, \end{cases}$$

   encontre a solução para $Ax = b$.

2. Considere o sistema $Ax = b$

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25, \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11, \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15. \end{cases}$$

   Aplique uma iteração do Método Jacobi-Richardson, a partir do ponto $x^{(0)} = (1, 1, 1, 1)^T$, e calcule o erro relativo para o valor obtido. Utilize 4 dígitos significativos.

3. Considere o sistema $Ax = b$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

   Aplique uma iteração do Método Gauss-Seidel, a partir do ponto $x^{(0)} = (1.0, 0.75, -0.875)^T$, e calcule o erro relativo para o valor obtido. Utilize 4 dígitos significativos. Observação: suponha que o método converge.

4. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Utilizando o ponto inicial $x^{(0)} = (1,1,1)^T$ e $\epsilon = 10^{-2}$, aplique o Método das Potências para determinar o maior autovalor em módulo de A. Utilize, no máximo, duas iterações.

5. Aplique uma iteração do Método de Newton para calcular uma raiz da função $f(x) = 2e^x - 4x - 3$, utilizando o ponto inicial $x_0 = 1.6$. Calcule os erros absoluto e relativo. Usando precisão 10^{-1}, o ponto calculado seria aceito?

6. Dado o sistema não linear

$$\begin{cases} x + y & = & 1, \\ x^2 + 2y & = & 2, \end{cases}$$

aplique uma iteração do Método de Newton para encontrar uma solução do sistema, a partir do ponto $(x_0, y_0)^T = (0,0)^T$. Calcule os erros absoluto e relativo. O ponto calculado é uma boa aproximação para a solução do sistema?

7. Considere a função $f(x) = \sqrt{x+1}$ e os pontos $x_0 = 0$, $x_1 = 0.6$ e $x_2 = 0.9$. Construa o polinômio interpolador de grau no máximo dois para determinar uma aproximação para $f(0.45)$. Calcule o erro cometido pela aproximação.

8. Construa o gráfico dos pontos presentes na tabela

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	6	3	-1	2	4

Determine o grau de um polinômio para aproximar os valores da tabela e utilize o Método dos Quadrados Mínimos para aproximar estes dados por um polinômio do grau escolhido. Justifique sua escolha.

9. Um função $f(x)$ fornece os pontos da tabela:

x	-2	-1	0
$f(x)$	6	3	-1

Calcule o valor aproximado da integral de $f(x)$, no intervalo $[-2, 0]$, utilizando o Método do Trapézio Repetido. Qual o erro cometido?

Exercícios de prova

1. Dentre os métodos que você estudou no curso para resolver sistemas lineares, qual é o mais adequado para resolver os sistemas $Ay = x$ que são utilizados no Método das Potência Inversas para calcular o menor autovalor em módulo da matriz A. Justifique sua resposta.

2. Uma função $f(x)$ é dada pelos pontos da tabela:

x	2	3	5	6
$f(x)$	4	5	7	9

   Calcule o valor aproximado da integral desta função utilizando o Método dos Trapézios ou dos Trapézios Repetidos.

3. Considere a matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}.$$

   Para quais valores de α pode-se garantir a convergência dos Métodos Jacobi-Richardson e Gauss-Seidel? Baseado em quais critérios?

4. Considere a equação $f(x) = 2x^2 - 5x + 2 = 0$, cujas raízes são $x_1 = 0.5$ e $x_2 = 2$. Considere ainda os dois processos iterativos

$$x_{k+1} = \frac{2x_k^2 + 2}{5} \quad \text{e} \quad x_{k+1} = \sqrt{\frac{5x_k}{2} - 1}.$$

   Qual dos dois processos iterativos você utilizaria para obter a raiz x_1? Justifique sua escolha.

5. Dados dois pontos $A = (a_x, a_y)$ e $B = (b_x, b_y)$ no plano, a distância Euclidiana $d(A, b)$ entre eles é dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2}.$$

   Escreva as equações correspondentes a encontrar um ponto (x, y) que tenha distância 2 dos pontos $(2, 1)$ e $(1, 3)$.

6. Usando as equações definidas na questão anterior, utilize um método visto no curso para encontrar o ponto (x, y).

7. A determinação da área da seção reta de rios e lagos é importante em projetos de prevenção de enchentes (para o cálculo da vazão da água) e nos projetos de reservatórios (para o cálculo do volume total de água). A menos que dispositivos tipo sonar sejam usados na obtenção do perfil do fundo de rios e lagos, o engenheiro civil deve trabalhar com valores da profundidade, obtidos em pontos discretos da superfície. Um exemplo típico da seção reta de um rio é mostrado na figura a seguir.

   Escolha um dos métodos vistos no curso para aproximar a área da seção reta da figura dada. Justifique a escolha do método.

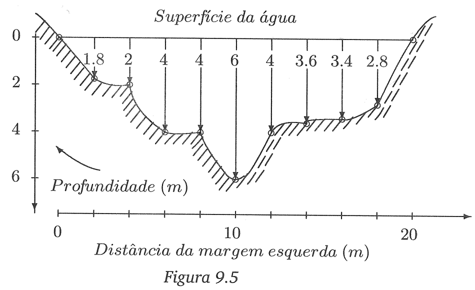

Figura 1: Fonte: Franco, 2006.

8. Suponha que você precise resolver o problema da questão anterior usando apenas 4 dos pontos descritos. Quais pontos você escolheria? E qual método seria mais adequado para resolver o problema. Justifique suas escolhas.

9. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = xy - y^2 + 1, & \\ y(0) = 1, & x \in [0, 0.2], \quad h = 0.05 \end{cases}$$

usando:

(a) o Método de Euler;

(b) o Método $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$, fazendo duas correções em cada iteração;

(c) o Método de Runge-Kutta de segunda ordem.

10. Verifique se as afirmações a seguir são Verdadeiras ou Falsas. Justifique suas respostas.

(a) Se $\|B\| > 1$ para alguma norma $\|.\|$, então o método iterativo $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$ para solução de um sistema linear diverge.

(b) O Método das Potências é aplicável sempre que existe um autovalor real que, em valor absoluto, é maior que os demais.

(c) O Método de Jacobi pode ser usado para calcular (aproximadamente) todos os autovalores de uma matriz simétrica, mas não fornece os autovetores correspondentes.

(d) É possível aproximar uma função, dada por alguns pontos, por um polinômio. Esta aproximação pode ser feita por polinômios interpoladores ou por quadrados mínimos. No entanto, a aproximação obtida por interpolação é sempre pior do que a aproximação obtida por quadrados mínimos.

(e) Dados alguns pontos no plano, é possível calcular um polinômio interpolador destes pontos. Os polinômios obtidos pela interpolação polinomial de Lagrange e o Método de Diferenças Divididas de Newton podem ser diferentes.