Resolução de sistemas de equações não-lineares: Método de Newton

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

24 de setembro de 2012

Baseado no livro Análise Numérica, de R. L. Burden e J. D. Faires.

Problema

Estamos interessados em encontrar $x \in \boldsymbol{R}^n$ solução do seguinte problema:

$$\boxed{\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \end{array}}$$

com f_i função de $\boldsymbol{R}^n$ em $\boldsymbol{R}$.

Seguindo as idéias do método de Newton para uma única equação, podemos generalizar o método para resolver problemas com n equações.

Vamos definir

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1^T(x) \\ \nabla f_2^T(x) \\ \vdots \\ \nabla f_n^T(x) \end{pmatrix}$$

Desenvolvimento do método de Newton

Usando a expansão de Taylor em torno de $\bar{x}$ para a função F, de maneira análoga ao que foi feito no caso de uma única equação, podemos escrever

$$\boxed{x^* \approx \bar{x} - J(\bar{x})^{-1}F(\bar{x}).}$$

Desenvolvimento do método de Newton

Assim, o método de Newton para resolver sistemas de equações não-lineares consiste em, dada uma aproximação inicial x_0 da solução, calcular a aproximação

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - J(x_k)^{-1} F(x_k)}$$

a cada iteração $k \geq 0$, até que o critério de convergência seja satisfeito.

Desenvolvimento do método de Newton

Para evitar o cálculo de $J(x_k)^{-1}$, geralmente resolve-se o sistema

$$\boxed{J(x_k)p_k = -F(x_k)}$$

em p_k. Então, calcula-se $x_{k+1} = x_k + p_k$.

Para resolver o sistema linear é usada alguma fatoração de $J(x_k)$, como, por exemplo, a fatoração LU.

Exemplo 1

Considere o sistema de equações

$$\boxed{\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4 &= 0, \\ 2x - y^2 &= 0, \end{aligned}}$$

que tem solução

$x^* = \sqrt{5} - 1 \approx 1.236068$ e $y^* = \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)} \approx 1.572303$.

Exemplo 1

Lembre-se que

$$\boxed{F(x) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 4 \\ 2x - y^2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J(x) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2 & -2y \end{pmatrix}}$$

Exemplo 1

A resolução desta equação usando o método de Newton, com aproximação inicial $x_0 = (1, 1)$, é dada por:

$$J(x_0)p_0 = -F(x_0)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0^1 \\ p_0^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} p_0^1 \\ p_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = x_0 + p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1.75 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1

$J(x_1)p_1 = -F(x_1)$

$$\begin{pmatrix} 2.5 & 3.5 \\ 2 & -3.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_1^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0.6250 \\ -0.5625 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_1^2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.013889 \\ -0.168651 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = x_1 + p_1 = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1.75 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.013889 \\ -0.168651 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.236111 \\ 1.581349 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1

A resolução desta equação usando o método de Newton, com aproximação inicial $x_0 = (1, 1)$, é dada por:

k	x_k	$F(x_k)$
0	(1.000000, 1.000000)	(-2.000000E+00, 1.000000E+00)
1	(1.250000, 1.750000)	(0.625000E+00, -0.562500E+00)
2	(1.236111, 1.581349)	(0.028636E+00, -0.028443E+00)
3	(1.236068, 1.572329)	(8.137262E−05, -8.137076E−05)
4	(1.236068, 1.572303)	(6.695751E−10, -6.695747E−10)

Exemplo 2

Considere o problema anterior e tome a aproximação inicial $x_0 = (-5, 5)$. Ao aplicarmos o método de Newton para resolver o sistema de equações, obtemos o seguinte resultado:

k	x_k	$F(x_k)$
0	(-5.00000000, 5.000000000)	(46.00000000, -35.00000000)
1	(-3.62500000, 1.775000000)	(12.29125000, -10.40062500)
2	(-3.26488095, -0.951869551)	(7.56550327, -7.43581755)
3	(-3.23625125, 2.923954680)	(15.02283320, -15.02201350)
4	(-3.23606799, 0.355233792)	(6.59832705, -6.59832702)
5	(-3.23606798, -8.932068180)	(86.25397800, -86.25397800)
6	(-3.23606798, -4.103736370)	(23.31278810, -23.31278810)
7	(-3.23606798, -1.263301940)	(8.06806774, -8.06806774)
8	(-3.23606798, 1.929944070)	(10.19682010, -10.19682010)
9	(-3.23606798, -0.711795716)	(6.97878910, -6.97878910)
10	(-3.23606798, 4.190445850)	(24.03197240, -24.03197240)
11	(-3.23606798, 1.322973840)	(8.22239574, -8.22239574)
12	(-3.23606798, -1.784568990)	(9.65682243, -9.65682243)

Convergência

Suponha que F seja continuamente diferenciável em um conjunto convexo aberto $\mathcal{D} \subset \boldsymbol{R}^n$. Seja $x^* \in \mathcal{D}$ uma solução não-degenerada de $F(x) = 0$ e seja $\{x_k\}$ a sequência gerada pelo método de Newton.

Então, quando $x_k \in \mathcal{D}$ está suficientemente perto de x^*, temos que a sequência converge superlinearmente para a solução.

Mais ainda, se F for Lipschitz contínua perto de x^*, a convergência é quadrática.

Dificuldades na aplicação do método de Newton

Apesar de apresentar convergência quadrática, o método de Newton apresenta alguns inconvenientes:

1. A aproximação inicial deve estar próxima da solução para que o método tenha convergência.
2. É necessário calcular a derivada de F em x_k em toda iteração k.
3. No caso de sistemas com várias equações, é necessário fatorar a matriz $J(x_k)$ para toda iteração k.
4. Quando n é grande, pode ser muito custoso calcular e fatorar $J(x_k)$.
5. Quando $J(x_k)$ é singular, o método de Newton pode não estar definido.
6. A raiz em questão pode ser degenerada. Ou seja, $J(x^*)$ pode ser singular.