Sistemas Lineares

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

5 de agosto de 2013

Introdução

Uma grande variedade de problemas da engenharia pode ser resolvida através da análise linear, entre eles podemos citar:

- determinação do potencial em redes elétricas,
- cálculo da tensão em estruturas metálicas da construção civil,
- etc.

O problema matemático em todos estes casos se reduz a resolver um sistema de equações simultâneas.

A maioria dessas aplicações envolve um conjunto de equações lineares.

Introdução

Uma equação é linear se cada termo contém não mais do que uma variável e cada variável aparece na primeira potência.

Exemplos:

- $3x + 4y - 10z = 3$: é linear;
- $xy - 3z = 7$: não é linear;
- $x^3 + y - z = 5$: não é linear.

Considere n equações lineares e n variáveis (incógnitas). Vamos nos referir a elas como um sistema linear de ordem n.

Uma solução para este sistema de equações consiste de valores para as n variáveis, tais que quando esses valores são substituídos nas equações, todas são satisfeitas simultaneamente.

Exemplo:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1, \\ x & - & y & - & z & = & 1, \\ 2x & + & 3y & - & 4z & = & 9. \end{array} \right.$$

A solução deste sistema linear é: $x = 1, y = 1$ e $z = -1$.

Introdução

Um sistema linear com m equações e n variáveis é escrito usualmente na forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{cases}$$

em que a_{ij} são os coeficientes, x_j são as variáveis e b_j são as constantes.

Este sistema pode ser escrito na forma matricial como $Ax = b$.

Introdução

Dado um sistema linear $Ax = b$, nosso objetivo é encontrar uma solução para o sistema, ou seja, encontrar x tal que $Ax = b$.

Classificação de um sistema linear

Um sistema linear pode ser:

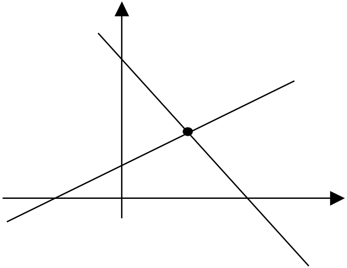
- Sistema possível ou consistente: é todo sistema que possui pelo menos uma solução, ele pode ser:
  - Determinado: se admite uma única solução;
  - Indeterminado: se admite mais de uma solução.
- Sistema impossível ou inconsistente: é todo sistema que não admite solução.

Classificação de um sistema linear

Exemplo: sistema linear com solução única. Considere o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 3, \\ x & - & 3y & = & -2. \end{array} \right.$$

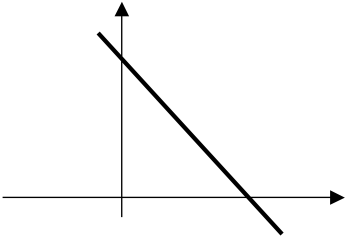
A solução deste sistema é $x = (11)^T$.



Exemplo: sistema linear com infinitas soluções. Considere o sistema

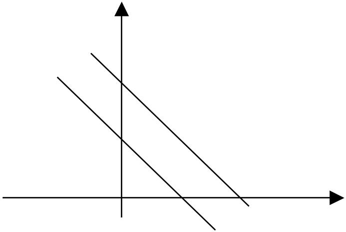
$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 3, \\ 4x & + & 2y & = & 6. \end{array}\right.$$

A solução deste sistema é $x = (\alpha 3 - 2\alpha)^T$, com $\alpha \in R$.



Exemplo: sistema linear sem solução. Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 4x + 2y = 2. \end{cases}$$



Objetivos

Vamos estudar métodos numéricos para resolver sistemas lineares de ordem n, que tenham solução única.

Observe que tais sistemas são aqueles em que a matriz A dos coeficientes é não singular, ou seja,

$$det(A) \neq 0.$$

Objetivos

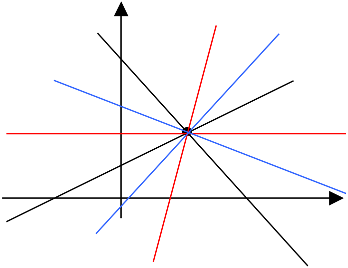
Os métodos numéricos para a solução de sistemas lineares são divididos principalmente em dois grupos:

- Métodos Exatos: forneceriam uma solução exata em um número finito de operações, senão fossem os erros de arredondamento;
- Métodos Iterativos: são aqueles que permitem obter uma solução com uma dada precisão através de um processo infinito convergente.

Sistemas Lineares Equivalentes

Dois sistemas lineares são ditos equivalentes quando admitem a mesma solução.

Exemplo:



Solução de sistemas triangulares

Um sistema linear de ordem n é dito triangular inferior se ele tiver a forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & & & & & & & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & & & & & = & b_2, \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n. \end{cases}$$

Um sistema linear de ordem n é dito triangular superior se ele tiver a forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ & & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_2, \\ & & & & & & \vdots & & \\ & & & & & & a_{1n}x_n & = & b_n. \end{cases}$$

Ambos podem ser facilmente resolvidos. A solução do sistema triangular inferior é dada por

- $x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$,
- $x_k = \frac{b_k - (a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{k,k-1}x_{k-1})}{a_{kk}}$, para $k = 2, \ldots, n$.

A solução do sistema triangular superior é dada por

- $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$,
- $x_k = \frac{b_k - (a_{k,k+1}x_{k+1} + a_{k,k+2}x_{k+2} + \ldots + a_{k,n}x_n)}{a_{kk}}$, para $k = n-1, \ldots, 1$.

Número de operações: $O(n^2)$.