Método Jacobi-Richardson

Marina Andretta/Franklina Toledo/Ana Paula Mazzini

ICMC-USP

20 de agosto de 2013

Baseado no livro Cálculo Numérico, de Neide B. Franco.

Já vimos que existem dois tipos de métodos numéricos para a solução de sistemas lineares:

- Métodos Exatos;
- Métodos Iterativos.

Métodos exatos

Métodos como

- Eliminação de Gauss,
- Decomposição LU

são ditos exatos: obtêm a solução final após um número k de passos.

Em alguns casos/aspectos, métodos iterativos têm algumas vantagens:

- são melhores em matrizes esparsas;
- apresentam auto-correção de erros (podem ser usados para melhorar a solução obtida por métodos exatos).

Métodos Iterativos

- Um método é **iterativo** quando fornece uma sequência de aproximantes da solução;

- No caso de métodos iterativos, precisamos saber se a sequência que estamos calculando está convergindo ou não para a solução.

O Método de Métodos Iterativos - Ideia geral

Queremos resolver o sistema linear $Ax = b$. Para tanto, vamos reescrever o sistema como

$$x = Bx + g,$$

onde $B = I - A$, $g = b$, por exemplo.

"Chutamos" um valor inicial para x, que chamamos de $x^{(0)}$. Obtemos

$$\begin{gathered}
x^{(1)} = Bx^{(0)} + g; \\
x^{(2)} = Bx^{(1)} + g; \\
x^{(3)} = Bx^{(2)} + g; \\
\vdots \\
x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g.
\end{gathered}$$

Convergência

A sequência gerada pelo algoritmo converge?

Critério: A sequência será convergente se, para alguma norma de matrizes, $\|B\| < 1$.

Considere o sistema linear $Ax = b$, de ordem n, onde $det(A) \neq 0$. Isto é,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

A matriz A pode ser escrita como a soma de três matrizes:

$$A = L + D + R,$$

onde

- L é uma matriz triangular inferior formada pela parte inferior de A,
- D é uma matriz diagonal formada pela diagonal de A e
- R é uma matriz triangular superior formada pela parte superior de A.

Então, $L = (l_{ij})$, $D = (d_{ij})$ e $R = (r_{ij})$, onde

$$l_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i > j, \\ 0, & i \leq j, \end{cases}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

$$r_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i < j, \\ 0, & i \geq j. \end{cases}$$

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O Método Jacobi-Richardson

Supondo que $\det(D) \neq 0$, podemos transformar o sistema linear original em

$$\begin{aligned} Ax &= b & \Rightarrow \\ (L+D+R)x &= b & \Rightarrow \\ Dx &= -(L+R)x+b & \Rightarrow \\ x &= -D^{-1}(L+R)x+D^{-1}b & , \end{aligned}$$

onde $-D^{-1}(L+R) = B$ e $D^{-1}b = g$.

O Método Jacobi-Richardson

O processo iterativo definido por

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+R)x^{(k)} + D^{-1}b$$

é chamado de *Método Jacobi-Richardson*.

O Método Jacobi-Richardson

Supondo que $det(D) \neq 0$ (ou seja, $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, ..., n$) e dividindo cada linha de A pelo elemento da diagonal, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 1 & a_{23}/a_{22} \\ a_{31}/a_{33} & a_{32}/a_{33} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^* & a_{13}^* \\ a_{21}^* & 1 & a_{23}^* \\ a_{31}^* & a_{32}^* & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21}^* & 0 & 0 \\ a_{31}^* & a_{32}^* & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12}^* & a_{13}^* \\ 0 & 0 & a_{23}^* \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim temos:

$$A^* = L^* + I + R^*.$$

O Método Jacobi-Richardson

No caso geral,

$$l_{ij}^* = \begin{cases} a_{ij}^* = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i > j, \\ 0, & i \leq j, \end{cases}$$

$$r_{ij}^* = \begin{cases} a_{ij}^* = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i < j, \\ 0, & i \geq j, \end{cases}$$

$$b_i^* = \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

Reescrevendo novamente o sistema, temos

$$\begin{aligned} Ax &= b & \Rightarrow \\ A^*x &= b^* & \Rightarrow \\ (L^* + I + R^*)x &= b^* & \Rightarrow \\ x &= -(L^* + R^*)x + b^*, & \end{aligned}$$

onde $-(L^* + R^*) = B$ e $b^* = g$.

O processo iterativo fica

$$x^{(k+1)} = -(L^* + R^*)x^{(k)} + b^*.$$

Convergência do Método Jacobi-Richardson

Vimos que o processo iterativo

$$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + g$$

converge se $\|B\| < 1$, para ao menos uma norma de matriz.

Assim, o Método Jacobi-Richardson converge se, para alguma norma, $\|L^* + R^*\| < 1$.

Convergência do Método Jacobi-Richardson

- Critério das linhas:

$$\|L^* + R^*\|_\infty < 1.$$

Ou seja,

$$\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}^*|.$$

- Critério das colunas

$$\|L^* + R^*\|_1 < 1.$$

Ou seja,

$$\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}^*| < 1.$$

Convergência do Método Jacobi-Richardson

Note que, se a matriz for estritamente diagonal dominante (isto é, em cada linha, o módulo do elemento da diagonal é estritamente maior que a soma do módulo de todos os outros elementos da linha), então o critério de convergência é automaticamente atendido para $B = -(L^* + R^*)$.

Critérios de Parada

- Erro absoluto:

$$E_{abs} = \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq \epsilon.$$

- Erro relativo:

$$E_{rel} = \frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|}{\|x^{(k)}\|} \leq \epsilon.$$

Geralmente, ϵ é um valor suficientemente pequeno que nos indica a tolerância que o erro poderá ter (por exemplo, $\epsilon = 10^{-2}, \epsilon = 10^{-3}, \epsilon = 10^{-4}$).

Exemplo

Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} 10x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 7, \\ x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & -8, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 10x_3 & = & 6 \end{cases}$$

pelo Método Jacobi-Richardson, usando o ponto inicial $x^{(0)} = (0.7, -1.6, 0.6)^T$, até encontrar um erro de 10^{-2}.

Exemplo

Primeiramente, vamos verificar se é possível garantir a convergência do Método Jacobi-Richardson na resolução deste sistema linear.

Note que a matriz é estritamente diagonal dominante

$$\begin{array}{rclclcl}
|a_{12}| + |a_{13}| & = & |2| + |1| & < & |10| & = & |a_{11}|, \\
|a_{21}| + |a_{23}| & = & |1| + |1| & < & |5| & = & |a_{22}|, \\
|a_{31}| + |a_{32}| & = & |2| + |3| & < & |10| & = & |a_{33}|.
\end{array}$$

Isso já nos garante que o método irá convergir.

Exemplo

Critério das linhas:

$$\begin{aligned}
|a^*_{12}| + |a^*_{13}| &= |0.2| + |0.1| = 0.3,\\
|a^*_{21}| + |a^*_{23}| &= |0.2| + |0.2| = 0.4,\\
|a^*_{31}| + |a^*_{32}| &= |0.2| + |0.3| = 0.5,
\end{aligned}$$

$$\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1, j\neq i}^{3} |a^*_{ij}| = 0.5 < 1.$$

Critério das colunas:

$$\begin{aligned}
|a^*_{21}| + |a^*_{31}| &= |0.2| + |0.2| = 0.4,\\
|a^*_{12}| + |a^*_{32}| &= |0.2| + |0.3| = 0.5,\\
|a^*_{13}| + |a^*_{23}| &= |0.1| + |0.2| = 0.3,
\end{aligned}$$

$$\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1, i\neq j}^{3} |a^*_{ij}| = 0.5 < 1.$$

Exemplo

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.2x_2^{(k)} - 0.1x_3^{(k)} + 0.7, \\ x_2^{(k+1)} = -0.2x_1^{(k)} - 0.2x_3^{(k)} - 1.6, \\ x_3^{(k+1)} = -0.2x_1^{(k)} - 0.3x_2^{(k)} + 0.6. \end{cases}$$

- Iteração 1:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -0.2x_2^{(0)} - 0.1x_3^{(0)} + 0.7 = -0.2(-1.6) - 0.1(0.6) + 0.7 = 0.96, \\ x_2^{(1)} = -0.2x_1^{(0)} - 0.2x_3^{(0)} - 1.6 = -0.2(0.7) - 0.2(0.6) - 1.6 = -1.86, \\ x_3^{(1)} = -0.2x_1^{(0)} - 0.3x_2^{(0)} + 0.6 = -0.2(0.7) - 0.3(-1.6) + 0.6 = 0.94. \end{cases}$$

Exemplo (solução)

Calculando o erro:

$$E_{abs} = \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 0.26 \\ -0.26 \\ 0.34 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.34,$$

$$E_{rel} = \frac{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty}{\|x^{(1)}\|_\infty} = \frac{0.34}{1.86} \simeq 0.1828 > 10^{-2}.$$

Exemplo

Como o erro não foi satisfeito, continuamos o processo iterativo:

k	0	1	2	3	4
$x_1^{(k)}$	0.7000	0.9600	0.9780	0.9994	0.9979
$x_2^{(k)}$	-1.6000	-1.8600	-1.9800	-1.9888	-1.9996
$x_3^{(k)}$	0.6000	0.9400	0.9660	0.9984	0.9968
E_{abs}	-	0.3400	0.1200	0.0324	0.0108
E_{rel}	-	0.2125	0.0645	0.0163	0.0054

Exemplo

Como

$$E_{rel} = \frac{\|x^{(4)} - x^{(3)}\|_\infty}{\|x^{(4)}\|_\infty} = \frac{0.0108}{1.9996} \simeq 0.0054 < 10^{-2},$$

paramos o processo iterativo e devolvemos $x^{(4)}$ como solução aproximada do sistema.