SME0300 - Cálculo Numérico

Segundo semestre de 2013

Lista de Exercícios: Gabarito

Exercícios de prova

1. Dentre os métodos que você estudou no curso para resolver sistemas lineares, qual é o mais adequado para resolver os sistemas $Ay = x$ que são utilizados no Método das Potência Inversas para calcular o menor autovalor em módulo da matriz A. Justifique sua resposta.

   Resposta:

   Utilizaria a decomposição LU. Isto torna a resolução dos sistemas lineares mais eficiente, já que a decomposição é realizada uma única vez e depois pode ser utilizada em todo o método.

2. Considere a matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}.$$

   Para quais valores de α pode-se garantir a convergência dos Métodos de Jacobi-Richardson e Gauss-Seidel? Baseado em quais critérios?

   Resposta:

   Primeiramente, vamos analisar a convergência para o **Método de Jacobi-Richardson** *usando o Critério da Diagonal Dominante.*

   Para satisfazer a este critério, temos que $\alpha > 1$ e $\alpha < 2$. Logo, o método converge para qualquer valor de α entre 1 e 2 ($1 < \alpha < 2$).

   Não é necessário, mas vamos também estudar a convergência usando o Critério das Linhas e o Critério das Colunas.

   A matriz B do **Método de Jacobi-Richardson** *(para o exercício) é dada por:*

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha} \\ \frac{\alpha}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

   Pelo Critério das Linhas, temos que $\frac{1}{\alpha} < 1$ e $\frac{\alpha}{2} < 1$. Logo, escolhendo qualquer valor de α entre 1 e 2 ($1 < \alpha < 2$) a convergência é garantida.

   O mesmo se aplica ao Critério das Colunas.

   Agora vamos analisar a convergência para o **Método de Gauss-Seidel**.

Sabemos que o Critério da Diagonal Dominante e o Critério das Linhas também são válidos para este método. Logo, para todo valor de $\alpha \in (1, 2)$, este método converge.

Analisemos também o Critério de Sassenfeld:

$\beta_1 = a^*_{12} = \frac{1}{\alpha}$

$\beta_2 = a^*_{21}\beta_1 = \frac{\alpha}{2} * \frac{1}{\alpha} = 1/2$

$\max\{\beta_1, \beta_2\} = \max\{\frac{1}{\alpha}, 1/2\} < 1$

Portanto, para todo $\alpha > 1$, o método converge.

3. Dados dois pontos $A = (a_x, a_y)$ e $B = (b_x, b_y)$ no plano, a distância Euclidiana $d(A, B)$ entre eles é dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2}.$$

Escreva as equações correspondentes a encontrar um ponto (x, y) que tenha distância 2 dos pontos $(2, 1)$ e $(1, 3)$.

Resposta:

Considere $P_1 = (2, 1)$ e $P_2 = (1, 3)$, e seja $P = (x, y)$ o ponto que queremos encontrar.

A distância entre P_1 e P é dada por

$$d(P_1, P) = \sqrt{(2 - x)^2 + (1 - y)^2}.$$

Sabemos também que $d(P_1, P) = 2$, ou seja,

$$2 = \sqrt{(2 - x)^2 + (1 - y)^2}.$$

Do mesmo modo, sabemos que a distância entre P_2 e P é dada por

$$d(P_2, P) = \sqrt{(1 - x)^2 + (3 - y)^2}.$$

Sabemos também que $d(P_2, P) = 2$, ou seja,

$$2 = \sqrt{(1 - x)^2 + (3 - y)^2}.$$

Logo, para encontrar o ponto P que tenha distância 2 dos pontos P_1 e P_2, devemos resolver o sistema de equações não-lineares dado por

$$\begin{cases} \sqrt{(2 - x)^2 + (1 - y)^2} = 2, \\ \sqrt{(1 - x)^2 + (3 - y)^2} = 2. \end{cases}$$

4. Usando as equações definidas na questão anterior, utilize um método visto no curso para encontrar o ponto (x, y).

Resposta:

Podemos utilizar, para resolver este problema, o Método Iterativo Linear ou o Método de Newton para solução de sistemas não-lineares.

Escolhemos utilizar o Método de Newton. Vamos denotar por x_k^T *o ponto* (x_k, y_k),

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2} - 2 \\ \sqrt{(1-x)^2 + (3-y)^2} - 2 \end{pmatrix},$$

$J_F(x_k)$ *o Jacobiano da função* F *em* x_k. *Usaremos o ponto inicial* $x_0 = (0, 0)^T$, *tolerância* 10^{-3} *e norma Euclidiana (quando for necessário usar alguma norma).*

Assim, temos

$$x_0 = (0.0000, 0.0000)^T \quad e \quad F(x_0) = (0.2361, 1.1623)^T.$$

Como $\|F(x_0)\|_2 = 1.1860 > 10^{-3}$, *vamos calcular*

$$J_F(x_0) = \begin{pmatrix} -0.8944 & -0.4472 \\ -0.3162 & -0.9487 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema $J_F(x_0)d_0 = F(x_0)$, *temos* $d_0 = (0.4184, -1.3646)^T$. *Assim,*

$$x_1 = x_0 - d_0 = (-0.4184, 1.3646)^T.$$

Calculando os erros absoluto e relativo, temos

$$\|x_0 - x_1\|_2 = 1.4273 > 10^{-3} \quad e \quad \frac{\|x_0 - x_1\|_2}{\|x_1\|_2} = 1.0000 > 10^{-3}.$$

Vamos, agora, calcular a função F *no ponto* x_1. *Temos que* $F(x_1) = (0.4457, 0.1648)^T$ *e* $\|F(x_1)\|_2 = 0.4752 > 10^{-3}$.

O Jacobiano de F *em* x_1 *é dado por*

$$J_F(x_1) = \begin{pmatrix} -0.9888 & 0.1491 \\ -0.6552 & -0.7555 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema $J_F(x_1)d_1 = F(x_1)$, *temos* $d_1 = (-0.4277, 0.1528)^T$. *Assim,*

$$x_2 = x_1 - d_1 = (0.0093, 1.2118)^T.$$

Calculando os erros absoluto e relativo, temos

$$\|x_1 - x_2\|_2 = 0.4542 > 10^{-3} \quad e \quad \frac{\|x_1 - x_2\|_2}{\|x_2\|_2} = 0.3748 > 10^{-3}.$$

Vamos, então, calcular a função F no ponto x_2. Temos que $F(x_2) = (0.0019, 0.0443)^T$ e $\|F(x_2)\|_2 = 0.0443 > 10^{-3}$.

O Jacobiano de F em x_2 é dado por

$$J_F(x_2) = \begin{pmatrix} -0.9944 & 0.1058 \\ -0.4846 & -0.8747 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema $J_F(x_2)d_2 = F(x_2)$, temos $d_2 = (-0.0069, -0.0468)^T$. Assim,

$$x_3 = x_2 - d_2 = (0.0162, 1.2586)^T.$$

Calculando os erros absoluto e relativo, temos

$$\|x_2 - x_3\|_2 = 0.0473 > 10^{-3} \quad e \quad \frac{\|x_2 - x_3\|_2}{\|x_3\|_2} = 0.0376 > 10^{-3}.$$

Vamos, então, calcular a função F no ponto x_3. Temos que $F(x_3) = (0.0006, 0.0001)^T$. Como $\|F(x_3)\|_2 = 0.0006 < 10^{-3}$, paramos com x_3 como solução.

Portanto, um ponto que tem distância (aproximadamente) 2 tanto de $(2, 1)$ como de $(1, 3)$ é $(0.0162, 1.2586)$.

5. Verifique se as afirmações a seguir são Verdadeiras ou Falsas. Justifique suas respostas.

   (a) Se $\|B\| > 1$ para alguma norma $\|.\|$, então o método iterativo $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$ para solução de um sistema linear diverge.

   Resposta: Falsa.
   Pois se $\|B\| < 1$ para alguma norma $\|.\|$, o método converge.
   Pois se $\|B\| > 1$ para toda norma $\|.\|$, o método não tem garantia de convergência.

   (b) O Método das Potências é aplicável sempre que existe um autovalor real que, em valor absoluto, é maior que os demais.

   Resposta: Falsa.
   Pois além disso, os autovetores devem ser L.I.