Resolução de sistemas de equações não-lineares: Método Iterativo Linear

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

18 de setembro de 2013

Baseado no livro Análise Numérica, de R. L. Burden e J. D. Faires.

Sistemas de equações não-lineares

Um sistema de equações não-lineares tem a forma

$$\boxed{\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \end{array}}$$

com f_i função de $\boldsymbol{R}^n$ em $\boldsymbol{R}$.

Sistemas de equações não-lineares

Um sistema de equações não-lineares pode ser representado definindo-se uma função $F : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$,

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{pmatrix}.$$

Desta forma, o sistema pode ser escrito como

$$F(x) = 0.$$

Exemplo

O sistema

$$\begin{cases} 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} & = & 0, \\ x_1^2 - 81(x_2+0.1)^2 + \text{sen}(x_3) + 1.06 & = & 0, \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi-3}{3} & = & 0 \end{cases}$$

pode ser escrito na forma $F(x) = 0$, definindo-se

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2},$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2+0.1)^2 + \text{sen}(x_3) + 1.06,$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3}.$$

Exemplo

Assim, o sistema pode ser escrito como

$$F(x) = F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \text{sen}(x_3) + 1.06 \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Informações preliminares

Antes de vermos como resolver um sistema de equações não-lineares, precisamos de algumas informações sobre continuidade e diferenciabilidade de funções de $\boldsymbol{R}^n$ em $\boldsymbol{R}$.

Definição 1: *Seja $f : D \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$. Diz-se que a função f tem limite L em x_0, denotado*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

se, dado qualquer número $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ com

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

sempre que $x \in D$ e

$$0 < \|x - x_0\| < \delta.$$

Qualquer norma pode ser usada na **Definição 1**. Uma mudança de normas implicará na mudança do valor de δ a ser escolhido, mas a existência de um δ independe da norma usada.

Definição 2: *Seja* $f : D \subset \boldsymbol{R}^n \rightarrow \boldsymbol{R}$. *A função* f *é contínua em* $x_0 \in D$ *se o limite* $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ *existe e*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Além disso, f *é contínua em um conjunto* D*, denotado por* $f \in \mathcal{C}(D)$*, se* f *for contínua em cada ponto de* D*.*

Definição 3: *Seja* $F : D \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ *da forma*

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

com $f_i : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ *para cada* $i = 1, 2, ..., n$*. Definimos*

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = L = (l_1, l_2, ..., l_n)^T$$

se, e somente se, $\lim_{x \to x_0} f_i(x) = l_i$*, para cada* $i = 1, 2, ..., n$*.*

Teorema 1: *Sejam* $f : D \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ *e* $x_0 \in D$. *Se todas as derivadas parciais de* f *existirem e se existirem constantes* $\delta > 0$ *e* $K > 0$ *tais que, sempre que* $\|x - x_0\| < \delta$ *e* $x \in D$, *tenhamos*

$$\left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right| \leq K,$$

para $j = 1, 2, ..., n$, *então a função* f *é contínua em* x_0.

Definição 4: *A função* $G : D \subset \boldsymbol{R}^n \rightarrow \boldsymbol{R}^n$ *tem um ponto fixo em* $p \in D$ *se* $G(p) = p$.

O **Teorema 2**, a seguir, combina as definições e teoremas apresentados até aqui e define um método para encontrar uma solução de um sistema de equações não-lineares, bem como as condições para que o método convirja. Este método é conhecido com Método Iterativo Linear.

Teorema 2: *Seja* $D = \{(x_1, x_2, ..., x_n)^T | a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, ..., n\}$ *para algum conjunto de constantes* $a_1, ..., a_n$, $b_1, ..., b_n$. *Suponha que* $G : D \subset \boldsymbol{R}^n \rightarrow \boldsymbol{R}^n$ *seja contínua, com a propriedade de que* $G(x) \in D$, *sempre que* $x \in D$. *Então* G *tem um ponto fixo em* D.

Teorema 2 (continuação): *Suponha, além disso, que todas as funções componentes* g_i *de* G *tenham derivadas parciais contínuas e que exista uma constante* $K < 1$ *com*

$$\left|\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}\right| \leq \frac{K}{n},$$

para todo $x \in D$, $j = 1, ..., n$ *e* $i = 1, ..., n$. *Então, a sequência* $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, *definida por*

$$x^{(k)} = G\left(x^{(k-1)}\right),$$

para $k \geq 1$ *e* $x_0 \in D$ *arbitrário, converge para o único ponto fixo* $p \in D$ *e*

$$\|x^{(k)} - p\|_\infty \leq \frac{K^k}{1-K}\|x^{(0)} - x^{(1)}\|_\infty.$$

Exemplo

Considere o sistema não-linear

$$\begin{cases} 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} & = & 0, \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \operatorname{sen}(x_3) + 1.06 & = & 0, \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} & = & 0. \end{cases}$$

Se, em cada *i*-ésima equação, isolamos a variável x_i, temos

$$\begin{cases} x_1 & = & \frac{1}{3}\cos(x_2x_3) + \frac{1}{6} & = & g_1(x), \\ x_2 & = & \frac{1}{9}\sqrt{x_1^2 + \operatorname{sen}(x_3) + 1.06} - 0.1 & = & g_2(x), \\ x_3 & = & -\frac{1}{20}e^{-x_1x_2} - \frac{10\pi - 3}{60} & = & g_3(x). \end{cases}$$

Exemplo

Seja $G : \boldsymbol{R}^3 \rightarrow \boldsymbol{R}^3$ definida por
$G(x) = (g_1(x_1, x_2, x_3), g_2(x_1, x_2, x_3), g_3(x_1, x_2, x_3))^T$.

Usaremos os **Teoremas 1** e **2** para mostrar que G tem um único ponto fixo em

$$D = \{(x_1, x_2, x_3)^T | -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}.$$

Exemplo

Para todo $x \in D$, vale que

$$|g_1(x)| \leq \frac{1}{3}|\cos(x_2x_3)| + \frac{1}{6} \leq 0.5,$$

$$|g_2(x)| = \left|\frac{1}{9}\sqrt{x_1^2 + \text{sen}(x_3) + 1.06} - 0.1\right| \leq$$

$$\frac{1}{9}\sqrt{1^2 + \text{sen}(1) + 1.06} - 0.1 < 0.09,$$

$$|g_3(x)| = \frac{1}{20}e^{-x_1x_2} + \frac{10\pi - 3}{60} \leq \frac{1}{20}e^1 + \frac{10\pi - 3}{60} < 0.61.$$

Exemplo

Portanto, para todo $x \in D$, temos que $G(x) \in D$.

Vamos, agora, calcular os limitantes das derivadas parciais de g_1, g_2 e g_3, quando calculadas em pontos $x \in D$.

Como

$$\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} = \frac{\partial g_3(x)}{\partial x_3} = 0,$$

temos que, para todo $x \in D$,

$$\left|\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1}\right| = \left|\frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2}\right| = \left|\frac{\partial g_3(x)}{\partial x_3}\right| = 0.$$

Exemplo

Como

$$\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} = -\frac{1}{3} x_3 \text{sen}(x_2 x_3),$$

temos que, para todo $x \in D$,

$$\left| \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} \right| \leq \frac{1}{3} |x_3| |\text{sen}(x_2 x_3)| \leq \frac{1}{3} \text{sen}(1) < 0.281.$$

Exemplo

Como

$$\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_3} = -\frac{1}{3} x_2 \text{sen}(x_2 x_3),$$

temos que, para todo $x \in D$,

$$\left| \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_3} \right| \leq \frac{1}{3} |x_2| |\text{sen}(x_2 x_3)| \leq \frac{1}{3} \text{sen}(1) < 0.281.$$

Exemplo

Como

$$\frac{\partial g_2(x)}{\partial x_1} = \frac{x_1}{9\sqrt{x_1^2 + \text{sen}(x_3) + 1.06}},$$

temos que, para todo $x \in D$,

$$\left|\frac{\partial g_2(x)}{\partial x_1}\right| = \frac{|x_1|}{9\sqrt{x_1^2 + \text{sen}(x_3) + 1.06}} < \frac{1}{9\sqrt{0.218}} < 0.238.$$

Exemplo

Como

$$\frac{\partial g_2(x)}{\partial x_3} = \frac{\cos(x_3)}{18\sqrt{x_1^2 + \text{sen}(x_3) + 1.06}},$$

temos que, para todo $x \in D$,

$$\left|\frac{\partial g_2(x)}{\partial x_3}\right| = \frac{|\cos(x_3)|}{18\sqrt{x_1^2 + \text{sen}(x_3) + 1.06}} < \frac{1}{18\sqrt{0.218}} < 0.119.$$

Exemplo

Como

$$\frac{\partial g_3(x)}{\partial x_1} = \frac{1}{20} x_2 e^{-x_1 x_2},$$

temos que, para todo $x \in D$,

$$\left| \frac{\partial g_3(x)}{\partial x_1} \right| \leq \frac{1}{20} |x_2| e^{-x_1 x_2} \leq \frac{1}{20} e < 0.14.$$

Exemplo

Como

$$\frac{\partial g_3(x)}{\partial x_2} = \frac{1}{20} x_1 e^{-x_1 x_2},$$

temos que, para todo $x \in D$,

$$\left| \frac{\partial g_3(x)}{\partial x_2} \right| \leq \frac{1}{20} |x_1| e^{-x_1 x_2} \leq \frac{1}{20} e < 0.14.$$

Exemplo

Ou seja, as derivadas de g_1, g_2 e g_3 são limitadas em D e, pelo **Teorema 1**, g_1, g_2 e g_3 são contínuas em D. Consequentemente, a função G é contínua em D.

Além disso, para todo $x \in D$,

$$\left| \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right| \leq 0.281,$$

para $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3$.

Portanto, tomando $K = 3 \times 0.281 = 0.843$, vale a segunda parte do **Teorema 2**.

Exemplo

Do mesmo modo, podemos mostrar que as derivadas parciais $\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$, são contínuas.

Assim, pelo **Teorema 2**, temos que G tem um único ponto fixo em D. O que significa que o sistema não-linear original tem solução.

Note que o fato de o ponto fixo ser único não quer dizer que o sistema não-linear tenha solução única. Isso porque a definição das funções g_1, g_2 e g_3 podem variar.

Exemplo

Para aproximar o ponto fixo de G em D, usamos $x^{(0)} = (0.1, 0.1, -0.1)^T$.

Os iterandos são gerados usando

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{3}\cos(x_2^{(k-1)} x_3^{(k-1)}) + \frac{1}{6},$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{9}\sqrt{\left(x_1^{(k-1)}\right)^2 + \operatorname{sen}\left(x_3^{(k-1)}\right) + 1.06} - 0.1,$$

$$x_3^{(k)} = -\frac{1}{20} e^{-x_1^{(k-1)} x_2^{(k-1)}} - \frac{10\pi - 3}{60}.$$

Exemplo

A tabela a seguir mostra os resultados do uso do Método Iterativo Linear. Os iterandos foram gerados até que a condição $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-5}$ fosse satisfeita.

k	$(x^{(k)})^T$	$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty$
0	(0.10000000, 0.10000000, -0.10000000)	
1	(0.49998333, 0.00944115, -0.52310127)	0.423
2	(0.49999593, 0.00002557, -0.52336331)	9.4×10^{-3}
3	(0.50000000, 0.00001234, -0.52359814)	2.3×10^{-4}
4	(0.50000000, 0.00000003, -0.52359847)	1.2×10^{-5}
5	(0.50000000, 0.00000002, -0.52359877)	3.1×10^{-7}