Integração Numérica

Marina Andretta/Franklina Toledo

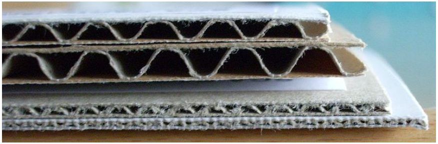
ICMC-USP

25 de outubro de 2013

Baseado nos livros: Análise Numérica, de R. L. Burden e J. D. Faires; e Cálculo Numérico, de Neide B. Franco.

Exemplo

Existe um tipo de papelão que é formado por três camadas de papel. As duas camadas externas são de papelão liso, enquanto que a camada interna é formada por papelão ondulado. Este tipo de papelão é ilustrado na figura abaixo.



Fonte: pt.wikipedia.org

Exemplo

Suponha que queremos obter uma folha de papelão de 4 metros de comprimento. A altura de cada onda do papel ondulado é de 1cm, a partir de seu centro, e cada onda tem um período de, aproximadamente, 2πcm.

O problema de se encontrar o comprimento da folha ondulada necessária para fabricar este papelão consiste em determinar o comprimento da curva dada por $f(x) = \sin(x)$, a partir de $x = 0$cm, até $x = 400$cm.

Exemplo

Do Cálculo, sabemos que esse comprimento é dado por

$$L = \int_0^{400} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^{400} \sqrt{1 + (\cos(x))^2} dx.$$

O que reduz o problema ao cálculo desta integral.

Exemplo

O cálculo desse comprimento envolve uma integral elíptica de segunda ordem, que não pode ser calculada pelos métodos ordinários.

Nesta aula, veremos alguns métodos numéricos para obter uma solução aproximada para problemas deste tipo.

Vamos estudar métodos numéricos para calcular aproximadamente a integral de uma função com uma variável real definida num intervalo $[a, b]$,

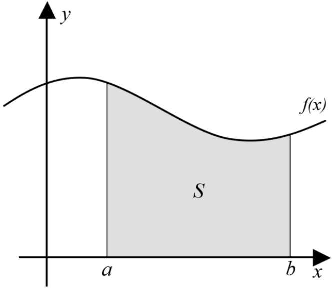
$$\int_a^b f(x)dx,$$

em que $f(x)$ é contínua com derivadas contínuas em $[a, b]$.

Quando é possível determinar uma função primitiva $F(x)$ de $f(x)$, tal que $F'(x) = f(x)$, o valor da integral é dado por

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Graficamente, considerando $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, podemos relacionar a integral com a área A, como ilustrado na figura a seguir.



Fonte: pt.wikipedia.org

As técnicas de integração numérica são utilizadas para calcular uma integral definida de $f(x)$, em especial quando

- $f(x)$ é conhecida apenas em pontos discretos, obtidos através de experimentos;
- $f(x)$ não tem integral explícita ou sua integral não é simples de se obter.

Integração Numérica

A ideia básica da integração numérica é aproximar $\int_a^b f(x)dx$ pela soma ponderada de um conjunto de funções.

Isto é chamado de Método de **Quadratura Numérica**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i).$$

Para calcular a aproximação da integral de $f(x)$, podemos aproximar f por um polinômio interpolador, em pontos equidistantes do intervalo $[a, b]$.

Depois, calculamos a integral do polinômio interpolador no intervalo fechado $[a, b]$. Ou seja,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i).$$

em que $P_n(x)$ é o polinômio interpolador de grau até n e a_i são funções apropriadas.

Este processo é conhecido como Fórmulas de Quadratura de Newton-Cotes.

Existem outras fórmulas de aproximação para o cálculo da integral de $f(x)$, conhecidas como Fórmulas de Quadratura de Gauss.

Considere uma função $f(x)$, definida em $x_0, x_1, ..., x_n$, $n+1$ pontos distintos e equidistantes do intervalo $[a, b]$, ou seja,

$$x_{i+1} - x_i = h,$$

para $i = 0, 1, 2, ...n-1$, com $h > 0$.

Quando $x_0 = a$ e $x_n = b$, temos as **fórmulas fechadas de Newton-Cotes**.

Seja $P_n(x)$ o polinômio interpolador de $f(x)$ nos pontos $x_0, x_1, ..., x_n$. Sabemos que

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x),$$

com

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_0)...(x - x_n),$$

para algum $x_0 \leq \xi_x \leq x_n$.

Podemos, portanto, aproximar o cálculo da integral de $f(x)$ por

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_n} P_n(x)dx,$$

com o erro dado por

$$\int_{x_0}^{x_n} E_n(x)dx.$$

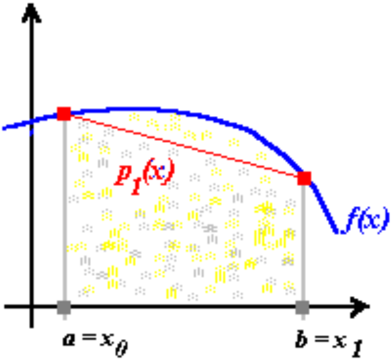
Vejamos, primeiramente, como é definida a Regra do Trapézio.

Se considerarmos $x_0 = a$ e $x_1 = b$, temos $h = b - a$.

O Polinômio de Lagrange é dado por

$$P_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1).$$

Regra do Trapézio



Fonte: www.math.ist.utl.pt

Regra do Trapézio

Temos, portanto,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} f(x_1) \right) dx$$
$$+\frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f''(\xi_x)(x-x_0)(x-x_1)dx.$$

Como $(x - x_0)(x - x_1)$ não muda de sinal em $[x_0, x_1]$, o Teorema do Valor Médio Ponderado para Integrais pode ser aplicado ao termo de erro.

Assim, obtemos, para qualquer $\xi \in [x_0, x_1]$,

$$\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi)(x - x_0)(x - x_1)dx = f''(\xi) \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1)dx$$

$$= f''(\xi) \left[x^3 - \frac{(x_1 + x_0)}{2} x^2 + x_0 x_1 x \right]_{x_0}^{x_1}$$

$$= -\frac{h^3}{6} f''(\xi).$$

Regra do Trapézio

Logo,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} f(x_1) \right) dx - \frac{h^3}{6} f''(\xi_x)$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} f(x_0) dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} f(x_1) dx - \frac{h^3}{6} f''(\xi_x)$$

$$= \frac{(x_1-x_0)}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{6} f''(\xi_x)$$

$$= \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{6} f''(\xi_x).$$

Regra do Trapézio Generalizada (repetida)

Utilizando a idéia da Regra do Trapézio, podemos obter a Regra do Trapézio Generalizada.

Para isto, subdividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais, cada qual de amplitude $h = (x_n - x_0)/n$, com $x_0 = a$ e $x_n = b$.

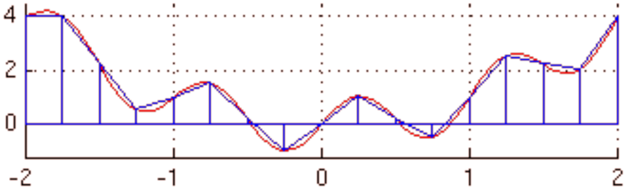
Regra dos Trapézios Generalizada (repetida)

Depois, aplicamos a Regra do Trapézio a cada um dos subintervalos. Ou seja,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + ... + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Regra do Trapézio Generalizada (repetida)



Fonte: pt.wikipedia.org

Regra de Simpson

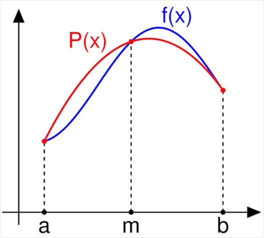
Uma outra possibilidade para aproximar a integral é calcular a interpolação polinomial da função em três pontos. Isso nos leva à Regra de Simpson.

Na Regra de Simpson, subdividimos o intervalo $[a, b]$ em dois subintervalos iguais. Ou seja, $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ e $x_2 = b$.

Aproximamos a integral de $f(x)$ pela integral do polinômio interpolador grau dois, ou seja,

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2).$$

Regra Simpson



Fonte: Slides Renato M. Assunção - DCC - UFMG

Assim,

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx.$$

Fazendo algumas manipulações algébricas, temos que

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)].$$

O erro é dado por

$$E_2 = -\frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{90},$$

com $x_0 \leq \xi \leq x_2$.

Assim como no caso da Regra do Trapézio, podemos subdividir o intervalo $[a, b]$ em subintervalos de tamanhos iguais e, a cada três pontos no intervalo, aplicar a Regra de Simpson. Somando todos os termos, temos uma aproximação para a integral da função no intervalo $[a, b]$.

Esta é a chamada Regra de Simpson Composta.

Fórmula de Quadratura de Gauss

As aproximações que vimos até agora estão baseadas em pontos igualmente espaçados.

Uma maneira alternativa de calcular integrais de forma aproximada é utilizar a Fórmula de Quadratura de Gauss.

Nesta fórmula, busca-se escolher os pontos para se calcular a aproximação em uma maneira ótima, em vez de considerar apenas os pontos igualmente espaçados. Os pontos $x_1, x_2, ..., x_n$ pertencentes ao intervalo $[a, b]$ e os coeficientes $c_1, c_2, ..., c_n$ são escolhidos de modo a minimizar o erro esperado no cálculo da aproximação

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i).$$

Fórmula de Quadratura de Gauss

A qualidade da aproximação depende da escolha adequada dos parâmetros c_i e x_i, para $i = 1, 2, ..., n$.

Por exemplo, considere $n = 2$, $a = -1$ e $b = 1$. Suponha que queremos determinar c_1, c_2, x_1 e x_2 de maneira que a fórmula

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

dê um resultado exato sempre que $f(x)$ seja um polinômio de grau 3 ou menor, ou seja, quando

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,$$

para quaisquer constantes a_0, a_1, a_2 e a_3.

Fórmula de Quadratura de Gauss

Sabemos que

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) dx = a_0 \int 1 dx + a_1 \int x dx + a_2 \int x^2 dx + a_3 \int x^3 dx.$$

Isto equivale a mostramos que a fórmula dá resultados exatos para $f(x)$ igual a 1, x, x^2 e x^3.

Para $f(x) = 1$, temos que

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \Rightarrow$$

$$\int_{-1}^{1} 1dx = 1c_1 + 1c_2 \Rightarrow$$

$$c_1 + c_2 = 2.$$

Fórmula de Quadratura de Gauss

Para $f(x) = x$, temos que

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \Rightarrow$$

$$\int_{-1}^{1} xdx = c_1 x_1 + c_2 x_2 \Rightarrow$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0.$$

Fórmula de Quadratura de Gauss

Para $f(x) = x^2$, temos que

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \Rightarrow$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 \Rightarrow$$

$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = \frac{2}{3}.$$

Fórmula de Quadratura de Gauss

Para $f(x) = x^3$, temos que

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \Rightarrow$$

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 \Rightarrow$$

$$c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = 0.$$

Fórmula de Quadratura de Gauss

A solução para o sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = & 2, \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 & = & 0, \\ c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 & = & \frac{2}{3}, \\ c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 & = & 0 \end{cases}$$

é única e é dada por

$$c_1 = 1, c_2 = 1, x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Fórmula de Quadratura de Gauss

O que resulta na fórmula de aproximação

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \Rightarrow$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3}),$$

que, para todo polinômio de grau menor ou igual a três, dá o resultado exato.