Cálculo Numérico / Métodos Numéricos

Solução de sistemas não lineares
Método Iterativo Linear

23 mar 2009 . 11:22

Várias equações

- Nos tópicos de solução de equações, aprendemos métodos numéricos para resolver a equação:

$$f(x) = 0$$

- Em diversas situações, precisamos resolver problemas onde mais de uma variável e mais de uma equação estão interligadas:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_m) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_m) = 0 \\ ... \\ f_m(x_1, x_2, ..., x_m) = 0 \end{cases}$$

2x2

- Consideremos o caso de duas variáveis e duas incógnitas:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 \\ \ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 \end{cases} \xrightarrow{m\,=\,2} \begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Método Iterativo Linear

(Analogia com caso de uma variável)

- Para o caso de uma variável queríamos:

$$f(x) = 0$$

- Reescrevíamos na forma:

$$x = \psi(x)$$

- E obtínhamos o seguinte processo iterativo:

$$\boxed{x_{k+1} = \psi(x_k)}$$

Método Iterativo Linear

(Analogia com caso de uma variável)

- Para o caso de duas variáveis queremos:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

- Reescrevemos na forma:

Método Iterativo Linear para sistemas não lineares

$$\begin{cases} x = F(x,y) \\ y = G(x,y) \end{cases} \xrightarrow{\text{Analogamente}} \boxed{\begin{cases} x_{k+1} = F(x_k,y_k) \\ y_{k+1} = G(x_k,y_k) \end{cases}}$$

MIL para sistemas não lineares (Exemplo)

- Exemplo:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0.2x^2 + 0.2xy - x + 0.6 = 0 \\ g(x,y) = 0.4x + 0.1xy^2 - y + 0.5 = 0 \end{cases}$$

Podemos reescrever este sistema na forma:

$$\begin{cases} x = F(x,y) = 0.2x^2 + 0.2xy + 0.6 \\ y = G(x,y) = 0.4x + 0.1xy^2 + 0.5 \end{cases}$$

MIL para sistemas não lineares

- Exemplo

	x	y	F(x,y)	G(x,y)		|x(k+1) - x(k)|/|x(k+1)|	|y(k+1)-y(k)|/|y(k+1)|		
Cond. Iniciais	0.9	1.1	0.96	0.9689					
	0.96	0.9689	0.970349	0.975788		0.0625	0.135308081		
	0.970349	0.975788	0.977686	0.981235		0.010665031	0.007058536		
	0.977686	0.981235	0.983042	0.985484		0.007504893	0.005551671		
	0.983042	0.985484	0.987029	0.988776		0.005448248	0.004311014		
	0.987029	0.988776	0.990035	0.99132		0.004039016	0.003329494		
	0.990035	0.99132	0.992322	0.993285		0.003036681	0.002566598		
	0.992322	0.993285	0.994072	0.994802		0.002304802	0.001978127		
	0.994072	0.994802	0.995417	0.995975		0.001760611	0.001525452		
	0.995417	0.995975	0.996453	0.996882		0.001350889	0.00117738		
	0.996453	0.996882	0.997253	0.997583		0.001039735	0.000909559		
	0.997253	0.997583	0.997871	0.998126		0.000802014	0.000703258		
	0.997871	0.998126	0.99835	0.998547		0.000619626	0.000544155		
	0.99835	0.998547	0.99872	0.998873		0.000479269	0.000421313		
	0.99872	0.998873	0.999007	0.999126		0.000371022	0.000326371		
	0.999007	0.999126	0.99923	0.999322		0.000287406	0.000252931		
	0.99923	0.999322	0.999403	0.999474		0.000222741	0.000196082		
	0.999403	0.999474	0.999536	0.999592		0.000172687	0.000152052		
	0.999536	0.999592	0.99964	0.999683		0.000133918	0.000117934		

Convergindo para (1,1) - que é raiz do sistema.

MIL para sistemas não lineares (convergência)

- Condições suficientes (mas não necessárias) para convergência:

a) F,G e suas derivadas parciais de primeira ordem são contínuas numa vizinhança V da raiz $(\overline{x},\overline{y})$

b) As seguintes desigualdades são satisfeitas:

$$|F_x| + |F_y| \leq k_1 < 1$$

$$|G_x| + |G_y| \leq k_2 < 1$$

para todo ponto (x,y) pertencente à vizinhança V.

c) (x_0,y_0) pertence a V.

MIL para sistemas não lineares

$$\begin{cases} x = F(x,y) = 0.2x^2 + 0.2xy + 0.6 \\ y = G(x,y) = 0.4x + 0.1xy^2 + 0.5 \end{cases}$$

F e G satisfazem as condições de convergência ?
Tomemos por exemplo o ponto $(x_0,y_0) = (0.9,1.1)$

$F_x = 0.4x + 0.2y$ $\quad$ $F_y = 0.2x$
$G_x = 0.4 + 0.1y^2$ $\quad$ $G_y = 0.2xy$

Em (0.9,1.1):

$$|Fx| + |F_y| = 0.76 < 1$$
$$|Gx| + |G_y| = 0.719 < 1$$

Se (x_0, y_0) está na vizinhança de uma raiz, a condição c) está garantida