Cálculo Numérico / Métodos Numéricos

Sistemas lineares
Método de Cholesky

5 May 2008 . 10:25

Método de Cholesky

- Idéia:

Podemos simplificar o método de decomposição LU, quando a matriz é simétrica, positiva definida.

Definições e lembretes

- **Matrizes simétricas:**

  $a_{ij} = a_{ji}$

- **Matrizes positivas definidas:**

  $z^{\dagger}Az > 0$, qualquer que seja z.

  Critério de Sylvestre: a matriz é positiva definida se e somente se todos os menores principais tem determinante positivo

Método de Cholesky

- Se a matriz *A* é definida positiva, podemos decompô-la unicamente no produto GG^t, onde *G* é uma matriz triangular inferior com elementos positivos na diagonal.

$$GG^t = \begin{pmatrix} g_{11} & & & & \bigcirc \\ g_{21} & g_{22} & & & \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & \cdots & g_{n1} \\ & g_{22} & g_{32} & \cdots & g_{n2} \\ & & g_{33} & \cdots & g_{n3} \\ & & & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & & & g_{nn} \end{pmatrix}$$

Multiplicando as linhas *i* pelas colunas *i*, temos os elementos da diagonal da matriz *A*:

Método de Cholesky (diagonal)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$GG^t = \begin{pmatrix} g_{11} & & & & \bigcirc \\ g_{21} & g_{22} & & & \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & & \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & \dots & g_{n1} \\ & g_{22} & g_{32} & \dots & g_{n2} \\ & & g_{33} & \dots & g_{n3} \\ & & & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & & & g_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = g_{11}^2 ,$$

$$a_{22} = g_{21}^2 + g_{22}^2 ,$$

...

No caso geral:

$$a_{nn} = g_{n1}^2 + g_{n2}^2 + \dots + g_{nn}^2$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{g_{11}} & = & \sqrt{a_{11}} , \\ \mathbf{g_{ii}} & = & \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2 \right)^{1/2} \end{array} \right.$$

i=2,3,...

Fórmula (4.9)

Método de Cholesky (1ª coluna)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$GG^t = \begin{pmatrix} g_{11} & & & & \bigcirc \\ g_{21} & g_{22} & & & \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & & \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & \dots & g_{n1} \\ & g_{22} & g_{32} & \dots & g_{n2} \\ & & g_{33} & \dots & g_{n3} \\ & & & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & & & g_{nn} \end{pmatrix}$$

multiplicamos as linhas de G (abaixo da diagonal) pela 1ª coluna de G^t

$$\begin{aligned} a_{21} &= \mathbf{g_{21}}\, g_{11}\,, \\ a_{31} &= \mathbf{g_{31}}\, g_{11}\,, \\ \dots & \\ a_{n1} &= \mathbf{g_{n1}}\, g_{11}\,. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{g_{i1}} = \frac{a_{i1}}{g_{11}}, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Método de Cholesky (2ª coluna)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$GG^t = \begin{pmatrix} g_{11} & & & & \bigcirc \\ g_{21} & g_{22} & & & \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & & \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & \dots & g_{n1} \\ & g_{22} & g_{32} & \dots & g_{n2} \\ & & g_{33} & \dots & g_{n3} \\ & & & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & & & g_{nn} \end{pmatrix}$$

multiplicamos as linhas de G (abaixo da diagonal) pela 2ª coluna de G^t

$$a_{32} = g_{31}\, g_{21} + \mathbf{g_{32}}\, g_{22}\,,$$

$$a_{42} = g_{41}\, g_{21} + \mathbf{g_{42}}\, g_{22}\,,$$

$$\dots$$

$$a_{n2} = g_{n1}\, g_{21} + \mathbf{g_{n2}}\, g_{22}\,,$$

$$\Rightarrow \mathbf{g_{i2}} = \frac{a_{i2} - g_{i1} g_{21}}{g_{22}}, \quad i = 3, 4, \dots, n.$$

Método de Cholesky (n^a coluna)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$GG^t = \begin{pmatrix} g_{11} & & & & \bigcirc \\ g_{21} & g_{22} & & & \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & & \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & \dots & g_{n1} \\ & g_{22} & g_{32} & \dots & g_{n2} \\ & & g_{33} & \dots & g_{n3} \\ & & & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & & & g_{nn} \end{pmatrix}$$

multiplicamos as linhas de G (abaixo da diagonal) pela n^a coluna de G^t

Fórmula geral

$$\begin{cases} g_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{g_{11}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n, \\ g_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik}\, g_{jk}\right) / \, g_{jj} \;, \quad 2 \leq j < i. \end{cases}$$

Fórmula (4.10)

Relembrando a fórmula para a diagonal:

$$\begin{cases} g_{11} = \sqrt{a_{11}} \;, \\ g_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2\right)^{1/2} \end{cases}$$

Fórmula (4.9)

Que devem ser usadas de forma conveniente...

"Forma coveniente"

$$\begin{cases} \mathbf{g}_{11} & = & \sqrt{a_{11}}\ , \\ \mathbf{g}_{ii} & = & \left(a_{ii}\ -\ \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2\right)^{1/2} \end{cases}$$

Fórmula (4.9)

$$\begin{cases} \mathbf{g}_{i1} & = & \frac{a_{i1}}{g_{11}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n, \\ \mathbf{g}_{ij} & = & \left(a_{ij}\ -\ \sum_{k=1}^{j-1}\ g_{ik}\ g_{jk}\right)\ /\ g_{jj}\ \ ,\ \ 2 \leq j < i. \end{cases}$$

Fórmula (4.10)

1) Usamos (4.9) para calcular g_{11}
2) Usamos (4.10) para calcular g_{21}, g_{31}, ..., g_{n1}

3) Usamos (4.9) para calcular g22
4) Usamos (4.10) para calcular g32, g42, ..., gn2

...

"Forma coveniente"

$$\begin{pmatrix} g_{11} & & & & \bigcirc \\ g_{21} & g_{22} & & & \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

1) Usamos (4.9) para calcular g_{11}
2) Usamos (4.10) para calcular g_{21}, g_{31}, ..., g_{n1}

3) Usamos (4.9) para calcular g22
4) Usamos (4.10) para calcular g32, g42, ..., gn2

...

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

a) Verificar se A satisfaz as condições do método de Cholesky.

b) Decompor A em GG^t.

c) Calcular o determinante de A, usando a decomposição obtida .

Exemplo - resolução

a)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Condições para o método de Cholesky:

1) A é simétrica:

$a_{ij} = a_{ji}$ OK!

2) A matriz é definida positiva. (Vamos usar a condição de Sylvester: os menores principais tem todos determinante positivo):

$\det(A_1) = 4>0$; $\det(A_2) = 36>0$; $\det(A_3) = 36>0$ OK!

Exemplo - resolução

b)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Usamos uma sequência "conveniente":

calculamos:

1) g_{11} (4.9)

2) g_{21}, g_{31} (4.10)

3) g_{22} (4.9)

4) g_{32} (4.10)

5) g_{33} (4.9)

$$\begin{cases} \mathbf{g_{11}} = \sqrt{a_{11}}\,, \\ \mathbf{g_{ii}} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2\right)^{1/2} \end{cases}$$

$$g_{11} = \sqrt{a_{11}} = 2$$

$$\begin{cases} \mathbf{g_{i1}} = \frac{a_{i1}}{g_{11}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n, \\ \mathbf{g_{ij}} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik}\, g_{jk}\right) / g_{jj} \quad , \quad 2 \le j < i. \end{cases}$$

$$g_{21} = a_{21}/g_{11} = 1$$

$$g_{31} = a_{31}/g_{11} = -2$$

Exemplo - resolução

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

b)

$$g_{11} = 2$$
$$g_{21} = 1$$
$$g_{31} = -2$$

calculamos:

1) g_{11} (4.9)

2) g_{21}, g_{31} (4.10)

3) g_{22} (4.9)

4) g_{32} (4.10)

5) g_{33} (4.9)

$$\begin{cases} g_{11} = \sqrt{a_{11}}\,, \\ g_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2\right)^{1/2} \end{cases}$$

$$g_{22} = \sqrt{a_{22} - g_{21}^2} = 3$$

$$\begin{cases} g_{i1} = \frac{a_{i1}}{g_{11}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n, \\ g_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik}\, g_{jk}\right) / g_{jj} \;, \quad 2 \leq j < i. \end{cases}$$

$$g_{32} = (a_{32} - g_{31} \cdot g_{21})/g_{22} = 2$$

$$\begin{cases} g_{11} = \sqrt{a_{11}}\,, \\ g_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2\right)^{1/2} \end{cases}$$

$$g_{33} = \sqrt{(a_{33} - (g_{31}^2 - g_{32}^2)} = 1$$

Exemplo - resolução

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

c) determinante

$$g_{11} = 2$$
$$g_{21} = 1$$
$$g_{31} = -2$$
$$g_{22} = 3$$
$$g_{32} = 2$$
$$g_{33} = 1$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ 1 & 3 & \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G^{\dagger} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ & 3 & 2 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = G^{\dagger}G \rightarrow \det(A) = \underbrace{\det(G^{\dagger})}_{g_{11} \cdot g_{22} \cdot g_{33}} \cdot \underbrace{\det(G)}_{g_{11} \cdot g_{22} \cdot g_{33}} = (g_{11} \cdot g_{22} \cdot g_{33})^2$$

$$= 36$$

Observações

- O método de Cholesky é menos custoso computacionalmente que o método de decomposição LU
- Precisamos de A definida positiva para garantir que as raízes quadradas serão sempre efetuadas sobre números positivos (poderíamos também trabalhar com aritmética complexa)
- Como vimos no exemplo:
    - $\det(A) = (g_{11} \cdot g_{22} \dots g_{nn})^2$