

Solução de sistemas de equações não-lineares: método de Newton

Problema

Estamos interessados em encontrar $x \in \mathbf{R}^n$ solução do seguinte problema:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

com f_i função de \mathbf{R}^n em \mathbf{R} .

Sistemas com uma única equação

No caso do problema com $n = 1$, temos que o método de Newton consiste em, dada uma aproximação inicial x_0 da solução, calcular a aproximação

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

a cada iteração $k \geq 0$, até que o critério de convergência seja satisfeito.

Convergência (para $n = 1$)

Seja $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$. Se $x^* \in [a, b]$ é tal que $f(x^*) = 0$ e $f'(x^*) \neq 0$, então existe um $\delta > 0$ tal que o método de Newton gera uma sequência $\{x_k\}$ convergente para x^* para qualquer aproximação inicial $x_0 \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$.

Mais ainda, se o método de Newton converge, sua **convergência é quadrática**.

Sistemas com n equações

Seguindo as idéias do método de Newton para uma única equação, podemos generalizar o método para resolver problemas com n equações.

Vamos definir

$$F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \nabla f_1^T(\mathbf{x}) \\ \nabla f_2^T(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \nabla f_n^T(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Desenvolvimento do método de Newton

Usando a expansão de Taylor em torno de \bar{x} para a função F , de maneira análoga ao que foi feito no caso de uma única equação, podemos escrever

$$x^* \approx \bar{x} - J(\bar{x})^{-1}F(\bar{x}).$$

Desenvolvimento do método de Newton

Assim, o método de Newton para resolver sistemas de equações não-lineares consiste em, dada uma **aproximação inicial** x_0 da solução, calcular a aproximação

$$x_{k+1} = x_k - J(x_k)^{-1}F(x_k)$$

a cada iteração $k \geq 0$, até que o critério de convergência seja satisfeito.

Desenvolvimento do método de Newton

Para evitar o cálculo de $J(x_k)^{-1}$, geralmente resolve-se o sistema

$$J(x_k)p_k = -F(x_k)$$

em p_k . Então, calcula-se $x_{k+1} = x_k + p_k$.

Para resolver o sistema linear é usada alguma fatoração de $J(x_k)$, como, por exemplo, a **fatoração LU**.

Exemplo 3

Considere o sistema de equações

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 4 &= 0, \\2x - y^2 &= 0,\end{aligned}$$

que tem solução

$$x^* = \sqrt{5} - 1 \approx 1.236068 \text{ e } y^* = \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)} \approx 1.572303.$$

Exemplo 3

Lembre-se que

$$F(x) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 4 \\ 2x - y^2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J(x) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2 & -2y \end{bmatrix}$$

Exemplo 3

A resolução desta equação usando o método de Newton, com aproximação inicial $x_0 = (1, 1)$, é dada por:

$$J(x_0)p_0 = -F(x_0)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0^1 \\ p_0^2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} p_0^1 \\ p_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x_0 + p_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 1.75 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3

$$J(x_1)p_1 = -F(x_1)$$

$$\begin{bmatrix} 2.5 & 3.5 \\ 2 & -3.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^1 \\ p_1^2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0.6250 \\ -0.5625 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} p_1^1 \\ p_1^2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.013889 \\ -0.168651 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = x_1 + p_1 = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 1.75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.013889 \\ -0.168651 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.236111 \\ 1.581349 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3

A resolução desta equação usando o método de Newton, com aproximação inicial $x_0 = (1, 1)$, é dada por:

k	x_k	$f(x_k)$
0	(1.000000, 1.000000)	(-2.000000E+00, 1.000000E+00)
1	(1.250000, 1.750000)	(0.625000E+00, -0.562500E+00)
2	(1.236111, 1.581349)	(0.028636E+00, -0.028443E+00)
3	(1.236068, 1.572329)	(8.137262E-05, -8.137076E-05)
4	(1.236068, 1.572303)	(6.695751E-10, -6.695747E-10)

Exemplo 4

Considere o problema anterior e tome a **aproximação inicial** $x_0 = (-5, 5)$. Ao aplicarmos o método de Newton para resolver o sistema de equações, obtemos o seguinte resultado:

k	x_k	$f(x_k)$
0	(-5.00000000, 5.00000000)	(46.00000000, -35.00000000)
1	(-3.62500000, 1.77500000)	(12.29125000, -10.40062500)
2	(-3.26488095, -0.951869551)	(7.56550327, -7.43581755)
3	(-3.23625125, 2.923954680)	(15.02283320, -15.02201350)
4	(-3.23606799, 0.355233792)	(6.59832705, -6.59832702)
5	(-3.23606798, -8.932068180)	(86.25397800, -86.25397800)
6	(-3.23606798, -4.103736370)	(23.31278810, -23.31278810)
7	(-3.23606798, -1.263301940)	(8.06806774, -8.06806774)
8	(-3.23606798, 1.929944070)	(10.19682010, -10.19682010)
9	(-3.23606798, -0.711795716)	(6.97878910, -6.97878910)
10	(-3.23606798, 4.190445850)	(24.03197240, -24.03197240)
11	(-3.23606798, 1.322973840)	(8.22239574, -8.22239574)
12	(-3.23606798, -1.784568990)	(9.65682243, -9.65682243)

Convergência

Suponha que F seja continuamente diferenciável em um conjunto convexo aberto $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^n$. Seja $x^* \in \mathcal{D}$ uma solução não-degenerada de $F(x) = 0$ e seja $\{x_k\}$ a sequência gerada pelo método de Newton.

Então, quando $x_k \in \mathcal{D}$ está suficientemente perto de x^* , temos que a sequência **converge superlinearmente** para a solução.

Mais ainda, se F for Lipschitz contínua perto de x^* , a **convergência é quadrática**.

Dificuldades na aplicação do método de Newton

Apesar de apresentar convergência quadrática, o método de Newton apresenta alguns **inconvenientes**:

1. A **aproximação inicial** deve estar **próxima da solução** para que o método tenha convergência.
2. É necessário **calcular a derivada** de F em x_k **em toda iteração k** .
3. No caso de sistemas com várias equações, é necessário **fatorar a matriz $J(x_k)$** para toda iteração k .
4. Quando n é grande, pode ser muito **custoso** calcular e fatorar $J(x_k)$.
5. Quando $J(x_k)$ é **singular**, o método de Newton pode **não estar definido**.
6. A **raiz em questão pode ser degenerada**. Ou seja, $J(x^*)$ pode ser singular.