Cálculo Numérico / Métodos Numéricos

Determinação numérica de autovalores e autovetores
Método das Potências

16 Jun 2008 . 13:44

Método das potências

- Idéia:

  Determinar o autovalor de maior valor absoluto de uma matriz *A* e o seu correspondente autovetor **sem** determinar o polinômio característico da matriz.

Por que ?

  Algumas vezes, na prática, queremos determinar autovalores de módulo grande.

Teorema 6.2

Seja *A* uma matriz real de ordem *n* e sejam λ_1, λ_2, ... λ_n seus autovalores e u_1, u_2, ... u_n seus correspondentes autovetores. Suponha que os autovetores são linearmente independentes e que $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_n|$. Seja ainda a sequência definida por $y_{k+1} = Ay_k$, k=0,1,...

Tome y_0 como um valor arbitrário (que deve permitir a expansão abaixo)

$$y_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j$$

com c_j escalares e $c_1 \neq 0$.

Então:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(y_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lambda_1$$

e y_k tende ao autovetor correspondente.

Demonstração

Por hipótese: $y_0 = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n$.

$$\boxed{A u_i = \lambda_i u_i}$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= A y_0 \\
&= c_1 A u_1 + c_2 A u_2 + \ldots + c_n A u_n \\
&= c_1 \lambda_1 u_1 + c_2 \lambda_2 u_2 + \ldots + c_n \lambda_n u_n \\
&= \lambda_1 \left[c_1 u_1 + c_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} u_2 + \ldots + c_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} u_n \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2 &= A y_1 = A^2 y_0 \\
&= \lambda_1 \left[c_1 A u_1 + c_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} A u_2 + \ldots + c_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} A u_n \right] \\
&= \lambda_1 \left[c_1 \lambda_1 u_1 + c_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \lambda_2 u_2 + \ldots + c_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \lambda_n u_n \right] \\
&= \lambda_1^2 \left[c_1 u_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 u_2 + \ldots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^2 u_n \right]
\end{aligned}$$

Demonstração

- ...

$$
\begin{aligned}
y_k &= A y_{k-1} = A^k y_0 \\
&= \lambda_1^k \left[c_1 u_1 + \underbrace{c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k u_2 + \ldots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k u_n} \right]
\end{aligned}
$$

quando k-> ∞ tende a zero

$$
\left[c_1 u_1 + \cancelto{0}{c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^p u_2 + \ldots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^p u_n} \right]
$$

converge para $c_1 u_1$

(um múltiplo do autovetor correspondente a λ_1)

Demonstração

- E o autovalor:

$$\lambda_1 = \lim_{k\to\infty} \frac{(y_{k+1})_r}{(y_k)_r}$$

r-ésima componente.

fim da demonstração.

Cálculo de λ_1 (normalização)

- Na prática, o cálculo de λ_1 é feito através da construção de dois outros vetores:

$$z_{k+1} = Ay_k$$

$$y_{k+1} = \frac{1}{\alpha_{k+1}} z_{k+1} \qquad \alpha_{k+1} = \max_{1 \le r \le n} \left| (z_{k+1})_r \right|$$

Cálculo de λ_1 (normalização)

$$
\begin{aligned}
z_1 &= A y_0 \\
y_1 &= \frac{1}{\alpha_1} z_1 = \frac{1}{\alpha_1} A y_0 \\
z_2 &= A y_1 = \frac{1}{\alpha_1} A^2 y_0 \\
y_2 &= \frac{1}{\alpha_2} z_2 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} A^2 y_0
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
z_3 &= A y_2 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} A^3 y_0 \\
&\vdots \\
y_k &= \frac{1}{\alpha_k} z_k = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k} A^k y_0 \\
z_{k+1} &= A y_k = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k} A^{k+1} y_0 .
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{k \to \infty} \frac{(z_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lim_{k \to \infty} \frac{\left(A^{k+1} y_0\right)_r}{\left(A^k y_0\right)_r} = \lambda_1
$$

Exemplo 7.4 - *Usando o método das potências determinar o auto-valor de maior valor absoluto da matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

com precisão de 10^{-2}.

Tomemos $y_0 = (1,\ 1,\ 1)^t$. Temos:

$$z_1 = Ay_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} \; ; \; \alpha_1 = \max|\,(z_1)_r\,| = \max(|4|, |6|, |11|) = 11 \; .$$

$$y_1 = \frac{1}{\alpha_1} z_1 = \begin{pmatrix} 0.3636 \\ 0.5455 \\ 1 \end{pmatrix} \; , \; z_2 = Ay_1 = \begin{pmatrix} 2.0908 \\ 3.8182 \\ 7.5454 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{(z_2)_r}{(y_1)_r} = \begin{pmatrix} 5.7503 \\ 6.9995 \\ 7.5454 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = \frac{1}{\alpha_2} z_2 = \begin{pmatrix} 0.2771 \\ 0.5060 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z_3 = A y_2 = \begin{pmatrix} 1.8313 \\ 3.5662 \\ 7.1204 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1^{(2)} = \frac{(z_3)_r}{(y_2)_r} = \begin{pmatrix} 6.6088 \\ 7.0478 \\ 7.1204 \end{pmatrix}$$

$$\frac{|\lambda_1^{(2)} - \lambda_1^{(1)}|_r}{|\lambda_1^{(2)}|_r} \simeq \begin{pmatrix} 0.13 \\ 0.07 \\ 0.13 \end{pmatrix}$$

$$y_3 = \frac{1}{\alpha_3} z_3 = \begin{pmatrix} 0.2572 \\ 0.5008 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z_4 = A y_3 = \begin{pmatrix} 1.8256 \\ 3.5160 \\ 7.0304 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1^{(3)} = \frac{(z_4)_r}{(y_3)_r} = \begin{pmatrix} 7.0980 \\ 7.0208 \\ 7.0304 \end{pmatrix} .$$

$$\frac{|\lambda_1^{(3)} - \lambda_1^{(2)}|_r}{|\lambda_1^{(2)}|_r} \simeq \begin{pmatrix} 0.069 \\ 0.004 \\ 0.013 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \simeq 7.0208 \text{ com } \epsilon < 10^{-2} \text{ e } u_1 \simeq \begin{pmatrix} 0.2572 \\ 0.5008 \\ 1 \end{pmatrix} = y_3 .$$