

# Cálculo Numérico / Métodos Numéricos

Solução de equações polinomiais  
Briot-Ruffini-Horner

# Métodos iterativos

- Há vários métodos iterativos para resolver

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

- Bisseccção
- Posição Falsa
- Iterativo linear (ponto fixo)
- Newton

- Obviamente, todos podem ser usado para resolver equações polinomiais:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

# Equações polinomiais

- O que vamos aprender é que para equações polinomiais, existem métodos mais eficientes:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

- Em um primeiro momento, calculemos quanto gastamos computacionalmente para calcular  $P(x)$  para um dado  $x$ :

$x^n = x \cdot x^{n-1}$  precisa de  $(N-1)$  multiplicações

Há  $N$  somas

$N$  multiplicações dos coeficientes pelos termos em  $x$

# Equações polinomiais

$$P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

+	$a_4x^4 = a_4 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$	(4 multiplicações)
+	$a_3x^3 = a_3 \cdot x \cdot x \cdot x$	(3 multiplicações)
+	$a_2x^2 = a_2 \cdot x \cdot x$	(2 multiplicações)
+	$a_1x = a_1 \cdot x$	(1 multiplicação)
+	$a_0$	
		(4 somas)

reescrevendo

$$P(x) = (((a_4 \cdot x + a_3) \cdot x + a_2) \cdot x + a_1) \cdot x + a_0$$

4 multiplicações e 4 somas

# Equações polinomiais

no caso geral:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$n^2/2 + n/2$  multiplicações

$n$  adições

$$P(x) = (((\dots(a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots + a_1)x + a_0$$

$n$  multiplicações

$n$  adições

# Algoritmo de Briot-Ruffini

$$P(x) = (((a_4 \cdot x + a_3) \cdot x + a_2) \cdot x + a_1) \cdot x + a_0$$

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{\quad} \\
 b_4 \\
 \underbrace{\quad} \\
 b_3 \\
 \underbrace{\quad} \\
 b_2 \\
 \underbrace{\quad} \\
 b_1 \\
 \underbrace{\quad} \\
 b_0 = P(x)
 \end{array}$$

De maneira geral:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 b_n = a_n \\
 b_{n-k} = b_{n-k+1}x + a_{n-k}
 \end{array} \right.$$

# Algoritmo de Briot-Ruffini (exemplo)

$$P(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 5$$

$$P(x) = (((3 \cdot x + 2) \cdot x - 1) \cdot x + 1) \cdot x + 5$$

Quanto vale  $P(3)$  ?

$$b_4 = a_4 = 3$$

$$b_3 = b_4 \cdot x + a_3 = 3 \cdot 3 + 2 = 11$$

$$b_2 = b_3 \cdot x + a_2 = 11 \cdot 3 - 1 = 32$$

$$b_1 = b_2 \cdot x + a_1 = 32 \cdot 3 + 1 = 97$$

$$b_0 = b_1 \cdot x + a_0 = 97 \cdot 3 + 5 = 296$$

$$= P(3)$$

# Esquema prático

$$\text{Calcular } P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

em  $x = z$ :

$$b_4 = a_4$$

$$b_3 = b_4z + a_3$$

$$b_2 = b_3z + a_2$$

$$b_1 = b_2z + a_1$$

$$b_0 = b_1z + a_0 \longrightarrow P(z)$$

	$a_4$	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$	
$z$		+	+	+	+	
		$zb_4$	$zb_3$	$zb_2$	$zb_1$	
$b_i$	$b_4$	$b_3$	$b_2$	$b_1$	$b_0$	$P(z)$

Diagram illustrating the calculation of the coefficients  $b_i$  for the polynomial  $P(z)$  using the Horner's method. The coefficients  $a_i$  are shown in the top row. The intermediate coefficients  $b_i$  are shown in the bottom row. The calculation involves multiplying the previous coefficient  $b_{i+1}$  by  $z$  and adding the next coefficient  $a_i$  to get  $b_i$ . The final result  $P(z)$  is shown in red.

# Esquema prático aplicado ao exemplo

Calcular  $P(x) = 3x^4 + 2x^3 - 1x^2 + x + 5$   
em  $x = 3$ :

	3	2	-1	1	5	
3		+	+	+	+	
		9	33	96	291	
$b_i$	3	11	32	97	296	$P(z)$

Diagram illustrating the practical scheme for calculating the polynomial value at  $x = 3$ . The coefficients are 3, 2, -1, 1, 5. The value of  $x$  is 3. The intermediate results are 9, 33, 96, 291. The final result is 296, which is circled in red and labeled  $P(z)$ . A vertical line separates the coefficients from the results. A horizontal line separates the coefficients from the intermediate results. A horizontal line separates the intermediate results from the final result. A vertical line separates the final result from the label  $P(z)$ . A dashed arrow labeled  $z$  points from the value 3 to the first intermediate result 9.

# No caso geral

	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	...	$a_2$	$a_1$	$a_0$	
		+	+	...	+	+	+	
$z$		$zb_n$	$zb_{n-1}$	...	$zb_3$	$zb_2$	$zb_1$	
$b_i$	$b_n$	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	...	$b_2$	$b_1$	$b_0$	$P(z)$

Diagram illustrating the evaluation of a polynomial  $P(z)$  at a point  $z$ . The polynomial is represented as a sum of terms  $z^i b_i$ , where  $a_i$  are the coefficients and  $b_i$  are the values of the coefficients at the point  $z$ . The diagram shows the relationship between the coefficients  $a_i$ , the powers of  $z$ , and the resulting values  $b_i$ . A red circle highlights  $b_0$ , and the text  $P(z)$  is written in red.

ponto onde queremos calcular  $P(x)$  e  $P'(x)$

# Calcule:

- $P(x) = 2x^5 + 3x^3 - 2x^2 + x - 10$  em  $x=2$

$$P(2) = 72$$

- $P(x) = x^6 - 3x^5 - 2x^2 - x + 50$  em  $x=3$

$$P(3) = 29$$

# Obtendo a derivada

- Uma vez que sabemos calcular a derivada de um polinômio de maneira bem automatizada, podemos tentar analisar alguma forma de obtê-la também com alguma economia computacional. De fato:

$$P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P'(x) = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$

Lembremos que para um dado  $x = c$ :

$$b_4 = a_4$$

$$b_3 = b_4c + a_3$$

$$b_2 = b_3c + a_2$$

$$b_1 = b_2c + a_1$$

$$b_0 = b_1c + a_0$$



$$a_4 = b_4$$

$$a_3 = b_3 - b_4c$$

$$a_2 = b_2 - b_3c$$

$$a_1 = b_1 - b_2c$$

$$a_0 = b_0 - b_1c$$

# IDÉIA (para eficiência computacional)

- No método de Newton, a cada iteração, precisamos calcular  $P(x)$  e  $P'(x)$  em um dado ponto  $x_k$  (vamos chamá-lo de  $c$ ).
- Suponha que já calculamos  $P(c)$
- Para calcularmos  $P'(c)$  precisamos:

$$P'(c) = 4a_4c^3 + 3a_3c^2 + 2a_2c + a_1$$

Substituindo

$$a_4 = b_4; \quad a_3 = b_3 - b_4c; \quad a_2 = b_2 - b_3c; \quad a_1 = b_1 - b_2c;$$

$$P'(c) = 4b_4c^3 + 3(b_3 - b_4c)c^2 + 2(b_2 - b_3c)c + (b_1 - b_2c)$$

$$P'(c) = b_4c^3 + b_3c^2 + b_2c + b_1$$

Como calcular  $P'(c)$  da maneira mais eficiente que conhecemos ?

# IDÉIA (para eficiência computacional)

$$P'(c) = b_4c^3 + b_3c^2 + b_2c + b_1$$

Como calcular  $P'(c)$  da maneira mais eficiente que conhecemos ?

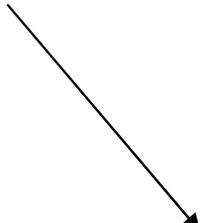
- Usamos a mesma estratégia:

$$c_4 = b_4$$

$$c_3 = b_4c + b_3$$

$$c_2 = b_3c + b_2$$

$$c_1 = b_2c + b_1$$



$P'(c)$

# Caso geral

De maneira geral:

$$\begin{cases} c_n = b_n \\ c_{n-k} = c_{n-k+1}x + b_{n-k} \end{cases} \quad k=1 \dots n-1$$

$$c_1 = P'(c)$$

# Esquema prático

	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	...	$a_2$	$a_1$	$a_0$	
$z$		$+$ $zb_n$	$+$ $zb_{n-1}$	...	$+$ $zb_3$	$+$ $zb_2$	$+$ $zb_1$	
$b_i$	$b_n$	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	...	$b_2$	$b_1$	$b_0$	$P(z)$
		$+$ $zc_n$	$+$ $zc_{n-1}$	...	$+$ $zc_3$	$+$ $zc_2$		
$c_i$	$c_n$	$c_{n-1}$	$c_{n-2}$	...	$c_2$	$c_1$		$P'(z)$

↓  
ponto onde queremos calcular  $P(x)$  e  $P'(x)$

# Algoritmo de Newton

- $\delta x = x_0$
- Para  $k=1 \dots it_{\max}$ 
  - $b = a_n$
  - $c = b$
  - Para  $i=(n-1)\dots 1$ 
    - $b = a_i + bx$
    - $c = b + cx$
  - se  $|b| < \varepsilon_1$  FIM
  - $\delta x = b/c$
  - $x = x - \delta x$
  - Se  $|\delta x| < \varepsilon_2$  FIM
- Não houve convergência no n. de iterações fixado (FIM)

Quais são os critérios de parada nesse caso ?

- a função está suficientemente próxima de zero

ou

- o passo é suficientemente pequeno.

# Exemplo (1/4)

- Calcular a raiz de  $P(x) = x^3 + 2x^2 - 0.85x - 1.7$  na proximidade de  $x=0.9$ , com erro relativo menor que  $10^{-2}$ .

	1	2	-0.85	-1.7	
		+	+	+	
		0.9	2.61	1.584	
$b_i$	1	2.9	1.76	-0.116	$\longrightarrow P(0.9)$
		+	+		
		0.9	3.42		
$c_i$	1	3.8	5.18		$\longrightarrow P'(0.9)$

podemos calcular  $x_1$

## Exemplo (2/4)

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 - P(x_0)/P'(x_0) \\ &= 0.9 - (-0.116)/1.584 = 0.9224\end{aligned}$$

Erro relativo:

$$|x_1 - x_0|/|x_1| \approx 0.02 > 10^{-2}$$

Continuamos!

# Exemplo (3/4)

■  $x_1 = 0.9224$

	1	2	-0.85	-1.7	
		+	+	+	
		0.9224	2.6956	1.7024	
$b_i$	1	2.9224	1.8456	0.0024	$P(0.9224)$
		+	+		
		0.9224	3.5464		
$c_i$	1	3.8448	5.392		$P'(0.9224)$

podemos calcular  $x_2$

## Exemplo (4/4)

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 - P(x_1)/P'(x_1) \\ &= 0.9224 - (0.0024)/5.392 = 0.9220\end{aligned}$$

Erro relativo:

$$|x_2 - x_1|/|x_2| \approx 0.0004 < 10^{-2}$$

FIM!

# Obtendo outras raízes

- Note que:

$$Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \dots + b_2 x + b_1 = P(x)/(x-z)$$

De fato:

$$\begin{aligned} & (b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \dots + b_2 x + b_1) (x-z) \\ &= b_n x^n + (b_{n-1} - z b_n) x^{n-1} + \dots + (b_1 - z b_2) x + (b_0 - z b_1) \\ &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

O que isso significa ?

- Podemos pegar a linha dos  $b_n$ 's na tabela e recomeçar o procedimento para conseguir mais uma raiz.

# Voltando ao exemplo

Tabela para a raiz: 0.9220

	1	2	-0.85	-1.7
		+	+	
		0.9220	2.6941	
$b_i$	1	2.9220	1.844	
	$b_3$	$b_2$	$b_1$	

Diagram illustrating the synthetic division process. A root of 0.9220 is used to divide the polynomial coefficients. The resulting coefficients are 1, 2.9220, and 1.844. The diagram shows the root 0.9220 being multiplied by the coefficients and the results being added to the next coefficient.

$$Q(x) = x^2 + 2.9220x + 1.844$$

Novo polinômio.

As raízes de  $Q(x)$  são as raízes ainda não calculadas de  $P(x)$