Cálculo Numérico / Métodos Numéricos

Sistemas lineares
Método Iterativo de Jacobi-Richardson

5 Nov 2008 . 11:12

Método iterativo

- Vimos que dado um sistema $Ax=b$, se conseguirmos reescrevê-lo na forma:

$$x = Bx+g$$

Podemos usar um processo iterativo do tipo:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g.$$

Que convergirá se, para qualquer norma consistente, $||B|| < 1$.

Jacobi-Richardson

- Vamos ver uma maneira simples de obter uma matriz B, chamado de método de Jacobi-Richardson.

- Seja o sistema :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \dots & & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

A matriz *A* (det(A)≠0) do sistema linear pode ser escrita como a soma de três matrizes:

A = L+D+R.

Jacobi-Richardson

A = L+D+R.

Vamos escolher L,D e R de modo que

L só tenha elementos abaixo da diagonal

D só tenha elementos na diagonal

R só tenha elementos acima da diagonal

$$\ell_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \ , \ i > j \\ 0 \ \ , \ i \leq j \end{cases} \quad ; \quad d_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \ , \ i = j \\ 0 \ \ , \ i \neq j \end{cases} \quad ; \quad r_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \quad i < j \\ 0 \quad\ \ i \geq j \end{cases}$$

Jacobi-Richardson

- Exemplo (3x3)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} =$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{R}$$

Jacobi-Richardson

- Supondo det(D)$\neq$ 0 ($a_{ii} \neq 0$, i=1,...n) e dividindo cada linha pelo elemento da diagonal, temos:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 1 & a_{23}/a_{22} \\ a_{31}/a_{33} & a_{32}/a_{33} & 1 \end{pmatrix}}_{A^*} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^* & a_{13}^* \\ a_{21}^* & 1 & a_{23}^* \\ a_{31}^* & a_{32}^* & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21}^* & 0 & 0 \\ a_{31}^* & a_{32}^* & 0 \end{pmatrix}}_{L^*} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12}^* & a_{13}^* \\ 0 & 0 & a_{23}^* \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{R^*}$$

exemplificado no caso 3x3, mas válido para qualquer dimensão obviamente, o vetor b_i também é dividido pelo elemento a_{ii}.

Jacobi-Richardson

- No caso geral:

$$\ell_{ij}^* = \begin{cases} a_{ij}^* & = & \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i > j \\ 0 & & , & i \leq j \end{cases}$$

$$r_{ij}^* = \begin{cases} a_{ij}^* & = & \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i < j \\ 0 & & , & i \geq j \end{cases}$$

$$b_i^* = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

Reescrevendo

- Podemos reescrever o sistema como:

$$(L^*+I+R^*)x = b^*$$

$$x = \underbrace{-(L^*+R^*)}_{B}x + \underbrace{b^*}_{g}$$

E o processo iterativo fica:

$$\boxed{x^{(k+1)} = -\left(L^* + R^*\right)\ x^{(k)} + b^*}$$

Jacobi-Richardson

Convergência

- Vimos que o processo iterativo

$$x^{(k)} = B\,x^{(k-1)} + g$$

converge se ||B|| < 1, para ao menos uma norma.

No caso de Jacobi-Richardson: B = -(L*+R*) e portanto o método converge se, por exemplo:
$||L^*+R^*||_\infty < 1$ (critério das linhas) **ou**
$||L^*+R^*||_1 < 1$ (critério das colunas):

$$\boxed{\max_{1\le i\le n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}^*| < 1}$$

$$\boxed{\max_{1\le j\le n} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}^*| < 1}$$

Notas

- Note que se a matriz for estritamente diagonal dominante (isto é, em cada linha, o elemento da diagonal é estritamente maior que a soma de todos os outros elementos da linha), então o critério de convergência é automaticamente atendido para $B = -(L^*+R^*)$.

- Note que o critério **independe** de $x^{(0)}$

- No método de Jacobi-Richardson todos os valores de x da iteração (k+1) dependem dos valores de x da iteração (k), por isso o método é também chamado de ***Método dos deslocamentos simultâneos.***

Exemplo

- Resolva o sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

Pelo método de Jacobi-Richardson com $x^{(0)} = (0.7, -1.6, 0.6)^{t}$, até encontrar um erro de 10^{-2}.

Exemplo (solução)

- Verificando convergência:

Vemos que a matriz é estritamente diagonal dominante:

$$
\begin{aligned}
|a_{12}| + |a_{13}| &= |2| + |1| < |10| = |a_{11}| \,, \\
|a_{21}| + |a_{23}| &= |1| + |1| < |5| = |a_{22}| \,, \\
|a_{31}| + |a_{32}| &= |2| + |3| < |10| = |a_{33}| \,.
\end{aligned}
$$

Portanto o método irá convergir.

Exemplo (solução)

- Verificando convergência (outros critérios que poderiam ser usados):

Critério das linhas:

$$
\begin{aligned}
|a^*_{12}| + |a^*_{13}| &= |0.2| + |0.1| = 0.3 \,, \\
|a^*_{21}| + |a^*_{23}| &= |0.1| + |0.1| = 0.2 \,, \\
|a^*_{31}| + |a^*_{32}| &= |0.2| + |0.3| = 0.5 \,, \\
\Rightarrow \max_{1 \le i \le n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{3} |a^*_{ij}| &= 0.5 < 1 \,,
\end{aligned}
$$

Critério das colunas:

$$
\begin{aligned}
|a^*_{21}| + |a^*_{31}| &= |0.2| + |0.2| = 0.4 \,, \\
|a^*_{12}| + |a^*_{32}| &= |0.2| + |0.3| = 0.5 \,, \\
|a^*_{13}| + |a^*_{23}| &= |0.1| + |0.2| = 0.3 \,, \\
\Rightarrow \max_{1 \le j \le n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{3} |a^*_{ij}| &= 0.5 < 1 \,,
\end{aligned}
$$

Exemplo (solução)

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} & = & -0.2x_2^{(k)} & - & 0.1x_3^{(k)} & + & 0.7 \\ x_2^{(k+1)} & = & -0.2x_1^{(k)} & - & 0.2x_3^{(k)} & - & 1.6 \\ x_3^{(k+1)} & = & -0.2x_1^{(k)} & - & 0.3x_2^{(k)} & + & 0.6 \end{cases}$$

- Iteração 1:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} & = & -0.2x_2^{(0)} - 0.1x_3^{(0)} + 0.7 = -0.2(-1.6) - 0.1(0.6) + 0.7 = 0.96 \\ x_2^{(1)} & = & -0.2x_1^{(0)} - 0.2x_3^{(0)} - 1.6 = -0.2(0.7) - 0.2(0.6) - 1.6 = -1.86 \\ x_3^{(1)} & = & -0.2x_1^{(0)} - 0.3x_2^{(0)} + 0.6 = -0.2(0.6) - 0.3(-1.6) + 0.6 = 0.94 \end{cases}$$

Exemplo (solução)

- Continuando:

k	0	1	2	3	4
x_1	0.7	0.96	0.978	0.9994	0.9979
x_2	-1.6	-1.86	-1.98	-1.9888	-1.9996
x_3	0.6	0.94	0.966	0.9984	0.9968

$$x^{(4)} - x^{(3)} = \begin{pmatrix} -0.0015 \\ 0.0108 \\ 0.0016 \end{pmatrix} ,$$

$$\frac{\| x^{(4)} - x^{(3)} \|_\infty}{\| x^{(4)} \|_\infty} = \frac{0.0108}{1.9996} \simeq 0.0054 < 10^{-2} ,$$

No Excell

iter:	x1	x2	x3		dif				Norma inf (	Norma inf s	erro rel	<10^{-2} ?
1	0.7	-1.6	0.6									
2	0.96	-1.86	0.94		0.26	0.26	0.34		0.34	1.86	0.182796	não
3	0.978	-1.98	0.966		0.018	0.12	0.026		0.12	1.98	0.060606	não
4	0.9994	-1.9888	0.9984		0.0214	0.0088	0.0324		0.0324	1.9888	0.016291	não
5	0.99792	-1.99956	0.99676		0.00148	0.01076	0.00164		0.01076	1.99956	0.005381	sim
6	1.000236	-1.99894	1.000284		0.002316	0.000624	0.003524		0.003524	1.998936	0.001763	sim
7	0.999759	-2.0001	0.999634		0.000477	0.001168	0.00065		0.001168	2.000104	0.000584	sim
8	1.000057	-1.99988	1.000079		0.000299	0.000226	0.000446		0.000446	1.999878	0.000223	sim
9	0.999968	-2.00003	0.999952		8.97E-05	0.000149	0.000127		0.000149	2.000027	7.44E-05	sim
10	1.00001	-1.99998	1.000015		4.25E-05	4.34E-05	6.26E-05		6.26E-05	1.999984	3.13E-05	sim
11	0.999995	-2	0.999993		1.49E-05	2.1E-05	2.15E-05		2.15E-05	2.000005	1.08E-05	sim
12	1.000002	-2	1.000002		6.36E-06	7.29E-06	9.3E-06		9.3E-06	1.999998	4.65E-06	sim
13	0.999999	-2	0.999999		2.39E-06	3.13E-06	3.46E-06		3.46E-06	2.000001	1.73E-06	sim
14	1	-2	1		9.72E-07	1.17E-06	1.42E-06		1.42E-06	2	7.08E-07	sim
15	1	-2	1		3.76E-07	4.78E-07	5.45E-07		5.45E-07	2	2.73E-07	sim
16	1	-2	1		1.5E-07	1.84E-07	2.18E-07		2.18E-07	2	1.09E-07	sim
17	1	-2	1		5.87E-08	7.37E-08	8.53E-08		8.53E-08	2	4.26E-08	sim
18	1	-2	1		2.33E-08	2.88E-08	3.39E-08		3.39E-08	2	1.69E-08	sim
19	1	-2	1		9.14E-09	1.14E-08	1.33E-08		1.33E-08	2	6.65E-09	sim
20	1	-2	1		3.61E-09	4.49E-09	5.26E-09		5.26E-09	2	2.63E-09	sim
21	1	-2	1		1.42E-09	1.77E-09	2.07E-09		2.07E-09	2	1.03E-09	sim
22	1	-2	1		5.62E-10	6.98E-10	8.17E-10		8.17E-10	2	4.08E-10	sim
23	1	-2	1		2.21E-10	2.76E-10	3.22E-10		3.22E-10	2	1.61E-10	sim
24	1	-2	1		8.73E-11	1.09E-10	1.27E-10		1.27E-10	2	6.35E-11	sim