Cálculo Numérico / Métodos Numéricos

Sistemas lineares
Relação entre Eliminação de Gauss e decomposição LU

Alysson M. Costa

31 Oct 2008 . 11:44

Matriz dos multiplicadores

- Tomemos o sistema Ax=b
- Para efetuar o método de eliminação de Gauss, construímos a matriz aumentada:

(A|b)

- Ao efetuarmos a primeira iteração do método de eliminação de gauss, tentamos zerar os elementos:

x $-(a_{21}/a_{11})$

x $-(a_{31}/a_{11})$

x $-(a_{n1}/a_{11})$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & | & b_1^{(1)} \\ \boxed{a_{21}^{(1)}} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & | & b_2^{(1)} \\ \boxed{a_{31}^{(1)}} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} & | & b_3^{(1)} \\ \dots & \dots & & & & | & \\ \boxed{a_{n1}^{(1)}} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & | & b_n^{(1)} \end{pmatrix},$$

Matriz dos multiplicadores

- Nomeando os multiplicadores:

x $-m_{21}$

x $-m_{31}$

x $-m_{n1}$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & | & b_1^{(1)} \\ \boxed{a_{21}^{(1)}} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & | & b_2^{(1)} \\ \boxed{a_{31}^{(1)}} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} & | & b_3^{(1)} \\ \dots & \dots & & & & | & \\ \boxed{a_{n1}^{(1)}} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & | & b_n^{(1)} \end{pmatrix},$$

- Ou seja, o que fazemos é:

$(A|b)^2 = M_1(A|b)^1$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -m_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -m_{n1} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz M

- De maneira semelhante: $(A|b)^3 = M_2(A|b)^2$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -m_{32} & 1 & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & -m_{n2} & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{com} \quad m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \quad i = 3, \dots, n,$$

- Aplicando a cada iteração, temos:

$$(A|b)^{(n)} = M_{n-1}(A|b)^{(n-1)} = \dots = \underbrace{M_{n-1} \dots M_1}_{M}(A|b)^{(1)}$$

Inversa de M

Ficamos com: $A^{(n)} = MA^{(1)} = MA$

E portanto: $\boxed{M^{-1}A^{(n)} = A}$

Vamos calcular M^{-1}. $M = M_{n-1} \dots M_2 M_1$:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -m_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -m_{n1} & & & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -m_{32} & 1 & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & -m_{n2} & & & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & m_{32} & 1 & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & m_{n2} & & & 1 \end{pmatrix}$$

E assim por diante...

Inversa de M = matriz dos multiplicadores

$$M^{-1} = M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{n-1}^{-1}$$

- Logo, fazendo as multiplicações:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ m_{21} & 1 & & & \\ m_{31} & m_{32} & 1 & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Tem o formato da matriz L

Relação com LU

- Como as matrizes LU são únicas:

$$M^{-1}A^{(n)} = A$$

L

então

U

Conclusões:

A matriz dos multiplicadores é a matriz L

A matriz resultado da eliminação de Gauss é a matriz U

Método de Gauss-Compacto

- O método que obtém as matrizes L e U e as armazena sobre os valores da matriz original A é chamado método de Gauss-compacto.
- Ao final teremos as matrizes L, U e o vetor b modificado.
- Para obter a solução, fazemos $Ux = b_{modificado}$
- Vantagem: economia de memória
- (Franco, p. 137)