Universidade de São Paulo
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

# Solução de equações não-lineares: método de Newton

Prof. Marina Andretta

# Problema

Estamos interessados em encontrar $x \in \boldsymbol{R}$ solução do seguinte problema:

$$\boxed{f(x) = 0,}$$

com $f$ função de $\boldsymbol{R}$ em $\boldsymbol{R}$.

# Desenvolvimento do método de Newton

Suponha que $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$. Seja $\bar{x} \in [a, b]$ uma aproximação de $x^*$ (solução) tal que $f'(\bar{x}) \neq 0$ e $|x^* - \bar{x}|$ é "pequeno".

Considere o polinômio de Taylor de primeiro grau para $f(x)$ expandido em torno de $\bar{x}$

$$\boxed{f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x-\bar{x})^2}{2} f''(\xi(x)),}$$

# Desenvolvimento do método de Newton

Como $f(x^*) = 0$, temos que

$$\boxed{f(x^*) = 0 = f(\bar{x}) + (x^* - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{2} f''(\xi(x^*)).}$$

Ou seja,

$$\boxed{x^* \approx \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}.}$$

# Desenvolvimento do método de Newton

Assim, o método de Newton consiste em, dada uma aproximação inicial $x_0$ da solução, calcular a aproximação

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

a cada iteração $k \geq 0$, até que o critério de convergência seja satisfeito.

# Interpretação do método de Newton

Geometricamente, o que o método de Newton faz é o seguinte:

1. Dado um ponto $x_k$, calcula a reta tangente a $f$ em $x_k$.
2. Encontra o ponto $\bar{x}_k$ no qual a reta tangente passa pelo zero.
3. Toma $x_{k+1} = \bar{x}_k$.

# Exemplo 1

Considere a equação

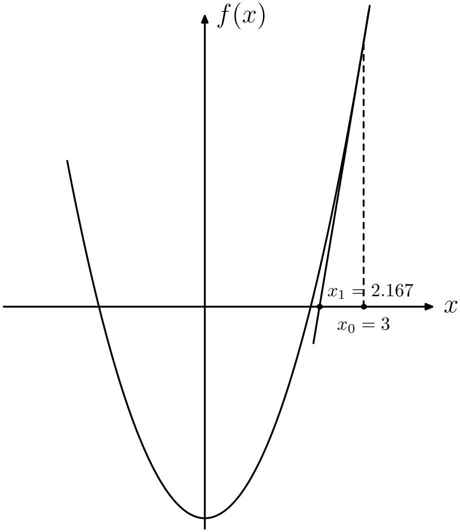
$$\boxed{x^2 - 4 = 0,}$$

que tem solução $x^* = 2$.

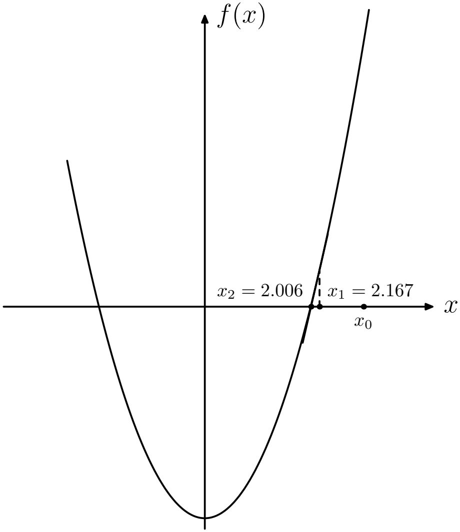
Note que

$$\boxed{f(x) = x^2 - 4 \quad \text{e} \quad f'(x) = 2x,}$$

# Exemplo 1



# Exemplo 1



# Exemplo 1

Usando ponto inicial $x_0 = 3$, a resolução desta equação, usando o método de Newton, é dada por:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)}$$

$$x_1 = 3 - \frac{3^2-4}{2\times 3} \approx 2.16666667$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2.16666667 - \frac{f(2.16666667)}{f'(2.16666667)}$$

$$x_2 = 2.16666667 - \frac{2.16666667^2-4}{2\times 2.16666667} \approx 2.00641026$$

# Exemplo 1

Usando ponto inicial $x_0 = 3$, a resolução desta equação, usando o método de Newton, é dada por:

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ |
|---|---|---|
| 0 | 3.00000000 | 5.00000000 |
| 1 | 2.16666667 | 0.69444444 |
| 2 | 2.00641026 | 0.02568212 |
| 3 | 2.00001024 | 4.09602097E−05 |
| 4 | 2.00000000 | 1.04858344E−10 |

# Exemplo 2

Considere agora a equação

$$\boxed{xe^{-x^2} = 0,}$$

que tem solução $x^* = 0$.

Note que

$$\boxed{f(x) = xe^{-x^2} \quad \text{e} \quad f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2),}$$

# Exemplo 2

Usando ponto inicial $x_0 = 1$, a resolução desta equação, usando o método de Newton, é dada por:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)}$$

$$x_1 = 1 - \frac{e^{-1}}{e^{-1}(1-2)} = 2$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)}$$

$$x_2 = 2 - \frac{2e^{-2^2}}{e^{-2^2}(1-22^2)} \approx 2.285714$$

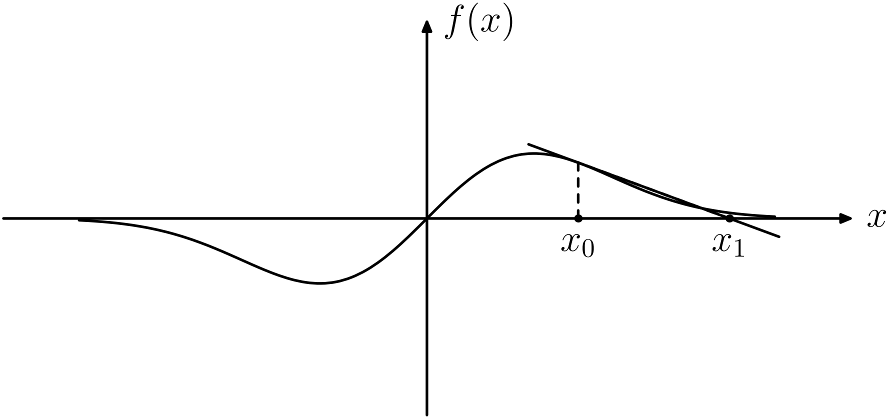
# Exemplo 2

Na verdade, a sequência gerada pelo método de Newton, neste caso, é dada por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k e^{-x_k^2}}{e^{-x_k^2}(1 - 2x_k^2)} = x_k - \frac{x_k}{(1 - 2x_k^2)}.$$

Note que, a partir de $x_k = 1$, esta é uma sequência crescente. Ou seja, ela não converge para a solução $x^* = 0$!.

# Exemplo 2



# Convergência

Seja $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$. Se $x^* \in [a, b]$ é tal que $f(x^*) = 0$ e $f'(x^*) \neq 0$, então existe um $\delta > 0$ tal que o método de Newton gera uma sequência $\{x_k\}$ convergente para $x^*$ para qualquer aproximação inicial $x_0 \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$.

Mais ainda, se o método de Newton converge, sua convergência é quadrática.