

Método Gauss-Seidel

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

17 de março de 2015

Baseado no livro Cálculo Numérico, de Neide B. Franco.

Como vimos, queremos resolver o sistema linear

$$Ax = b.$$

Para isso, podemos reescrevê-lo na forma

$$x = Bx + g.$$

O Método Jacobi-Richardson

Supondo que $\det(D) \neq 0$, podemos transformar o sistema linear original em

$$\begin{aligned} Ax &= b && \Rightarrow \\ (L + D + R)x &= b && \Rightarrow \\ Dx &= -(L + R)x + b && \Rightarrow \\ x &= -D^{-1}(L + R)x + D^{-1}b, \end{aligned}$$

onde $B = -D^{-1}(L + R)$ e $g = D^{-1}b$.

O Método Jacobi-Richardson

O processo iterativo definido por

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + R)x^{(k)} + D^{-1}b$$

é chamado de *Método Jacobi-Richardson*.

O Método Jacobi-Richardson

Supondo que $\det(D) \neq 0$ (ou seja, $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$) e dividindo cada linha de A pelo elemento da diagonal, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 1 & a_{23}/a_{22} \\ a_{31}/a_{33} & a_{32}/a_{33} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^* & a_{13}^* \\ a_{21}^* & 1 & a_{23}^* \\ a_{31}^* & a_{32}^* & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21}^* & 0 & 0 \\ a_{31}^* & a_{32}^* & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12}^* & a_{13}^* \\ 0 & 0 & a_{23}^* \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim temos:

$$A^* = L^* + I + R^*.$$

O Método Jacobi-Richardson

Reescrevendo novamente o sistema, temos

$$\begin{aligned}Ax &= b && \Rightarrow \\A^*x &= b^* && \Rightarrow \\(L^* + I + R^*)x &= b^* && \Rightarrow \\x &= -(L^* + R^*)x + b^*,\end{aligned}$$

onde $-(L^* + R^*) = B$ e $b^* = g$.

O processo iterativo fica

$$x^{(k+1)} = -(L^* + R^*)x^{(k)} + b^*.$$

A sequência gerada pelo algoritmo converge?

Critério: A sequência será convergente se, para alguma norma de matrizes, $\|B\| < 1$.

Transformando o sistema

$$(L^* + I + R^*)x = b^*$$

em

$$(L^* + I)x = -R^*x + b^*,$$

temos que

$$x = -(L^* + I)^{-1}R^*x + (L^* + I)^{-1}b^*.$$

O Método Gauss-Seidel

O processo iterativo definido por

$$x^{(k+1)} = -(L^* + I)^{-1}R^*x^{(k)} + (L^* + I)^{-1}b^*$$

é chamado de *Método Gauss-Seidel*.

O Método Gauss-Seidel

Observe que, multiplicando

$$x^{(k+1)} = -(L^* + I)^{-1}R^*x^{(k)} + (L^* + I)^{-1}b^*$$

por $(L^* + I)$, temos

$$(L^* + I)x^{(k+1)} = -R^*x^{(k)} + b^*.$$

Ou, ainda,

$$x^{(k+1)} = -L^*x^{(k+1)} - R^*x^{(k)} + b^*.$$

O Método Gauss-Seidel

Note que as componentes de $x^{(k+1)}$ podem ser calculadas sucessivamente, sem a necessidade de se calcular $(L^* + I)^{-1}$.

Observe também que, para o cálculo de uma componente de $x^{(k+1)}$, usamos o valor calculado mais recentemente das demais componentes. Por esse motivo, o Método Gauss-Seidel também é conhecido por *Método dos Deslocamentos Sucessivos*.

Esse método difere do Método Jacobi-Richardson por utilizar, no cálculo de uma componente de $x^{(k+1)}$, o valor mais recente das demais componentes.

Já vimos que a sequência gerada pelo algoritmo converge se $\|B\| < 1$, para alguma norma de matriz.

A matriz B usada no Método Gauss-Seidel é dada por

$$B = -(L^* + I^*)^{-1}R^*.$$

Vamos deduzir um critério de convergência a partir da norma infinito de B .

Definição: uma norma de matriz é dita **induzida** por uma norma de vetor se ela é definida como

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Assim,

$$\|A\|_{\infty} = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}}.$$

Seja x o vetor tal que realiza o máximo na expressão de $\|B\|_\infty$. Considere

$$y = Bx.$$

Para o Método Gauss-Seidel, temos que

$$B = -(L^* + I)^{-1}R^*.$$

Logo,

$$y = -(L^* + I)^{-1}R^*x \Rightarrow$$

$$(L^* + I)y = -R^*x \Rightarrow$$

$$y = -L^*y - R^*x.$$

Dado que $y = -L^*y - R^*x$, podemos escrever

$$\begin{aligned}y_1 &= -a_{12}^*x_2 - a_{13}^*x_3 - a_{14}^*x_4 - \dots - a_{1n}^*x_n, \\y_2 &= -a_{21}^*y_1 - a_{23}^*x_3 - a_{24}^*x_4 - \dots - a_{2n}^*x_n, \\y_3 &= -a_{31}^*y_1 - a_{32}^*y_2 - a_{34}^*x_4 - \dots - a_{3n}^*x_n, \\&\vdots \\y_n &= -a_{n1}^*y_1 - a_{n2}^*y_2 - a_{n3}^*y_3 - \dots - a_{n,n-1}^*y_{n-1}.\end{aligned}$$

Queremos calcular $\|Bx\|_\infty$ e sabemos que $\|Bx\|_\infty = \|y\|_\infty$, ou seja,

$$\|Bx\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i|.$$

Assim,

$$|y_1| = | - a_{12}^* x_2 - a_{13}^* x_3 - a_{14}^* x_4 - \dots - a_{1n}^* x_n | = \left| \sum_{j=2}^n -a_{1j}^* x_j \right| \Rightarrow$$

$$|y_1| \leq \sum_{j=2}^n | - a_{1j}^* x_j | \leq \sum_{j=2}^n |a_{1j}^*| |x_j| \Rightarrow$$

$$|y_1| \leq \sum_{j=2}^n |a_{1j}^*| \max_j |x_j| = \sum_{j=2}^n |a_{1j}^*| \|x\|_{\infty}.$$

Ou seja,

$$|y_1| \leq \beta_1 \|x\|_\infty, \text{ com } \beta_1 = \sum_{j=2}^n |a_{1j}^*|.$$

Fazendo os mesmos cálculos para $|y_2|$, temos

$$|y_2| = | -a_{21}^*y_1 - a_{23}^*x_3 - a_{24}^*x_4 - \dots - a_{1n}^*x_n | = \left| -a_{21}^*y_1 + \sum_{j=3}^n -a_{2j}^*x_j \right| \Rightarrow$$

$$|y_2| \leq | -a_{21}^*y_1 | + \sum_{j=3}^n | -a_{2j}^*x_j | \leq |a_{21}^*||y_1| + \sum_{j=3}^n |a_{2j}^*||x_j| \Rightarrow$$

$$|y_2| \leq |a_{21}^*|\beta_1\|x\|_\infty + \sum_{j=3}^n |a_{2j}^*| \max_j |x_j| \Rightarrow$$

$$|y_2| \leq |a_{21}^*|\beta_1\|x\|_\infty + \sum_{j=3}^n |a_{2j}^*|\|x\|_\infty.$$

Ou seja,

$$|y_2| \leq \beta_2 \|x\|_\infty, \quad \text{com} \quad \beta_2 = |a_{21}^*| \beta_1 + \sum_{j=3}^n |a_{2j}^*|.$$

Para $|y_i|$, temos

$$|y_i| = | - a_{i1}^* y_1 - a_{i2}^* y_2 - \dots - a_{i,i-1}^* y_{i-1} - a_{i,i+1}^* x_{i+1} - \dots - a_{in}^* x_n | \Rightarrow$$

$$|y_i| = \left| \sum_{j=1}^{i-1} -a_{ij}^* y_j + \sum_{j=i+1}^n -a_{ij}^* x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{i-1} | - a_{ij}^* y_j | + \sum_{j=i+1}^n | - a_{ij}^* x_j | \Rightarrow$$

$$|y_i| \leq \sum_{j=1}^{i-1} | - a_{ij}^* | |y_j| + \sum_{j=i+1}^n | - a_{ij}^* | |x_j| \Rightarrow$$

$$|y_i| \leq \sum_{j=1}^{i-1} | - a_{ij}^* | \beta_j \|x\|_{\infty} + \sum_{j=i+1}^n | - a_{ij}^* | \max_j |x_j| \Rightarrow$$

$$|y_i| \leq \sum_{j=1}^{i-1} | - a_{ij}^* | \beta_j \|x\|_{\infty} + \sum_{j=i+1}^n | - a_{ij}^* | \|x\|_{\infty}.$$

Portanto,

$$|y_i| \leq \beta_i \|x\|_\infty,$$

com

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}^*| \beta_j + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}^*|.$$

Assim, temos que

$$\|Bx\|_\infty = \|y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \beta_i \|x\|_\infty \Rightarrow$$

$$\frac{\|Bx\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \beta_i.$$

Como x foi escolhido de modo que

$$\|B\|_\infty = \frac{\|Bx\|_\infty}{\|x\|_\infty},$$

temos que

$$\|B\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \beta_i.$$

Se

$$\max_{1 \leq i \leq n} \beta_i < 1,$$

temos que $\|B\|_\infty < 1$ e, portanto, estará satisfeita uma condição suficiente de convergência.

Este é o Critério de Sassenfeld.

Critérios de Convergência

O Método Gauss-Seidel converge se

- O Critério de **Sassenfeld** for satisfeito, ou seja, se

$$\max_{1 \leq i \leq n} \beta_i < 1,$$

$$\text{com } \beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}^*| \beta_j + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}^*|.$$

- O critério das linhas for satisfeito, ou seja, se

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}^*| < 1.$$

- A matriz dos coeficientes do sistema linear for estritamente diagonal dominante.

Exemplo

Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

utilizando o Método Gauss-Seidel, com ponto inicial $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ e erro menor ou igual a 10^{-2} .

Primeiramente, vamos verificar se o Método Gauss-Seidel tem convergência garantida para a resolução do sistema.

- Como $|a_{22}| = 4 \not\geq 3 + 1 = |a_{21}| + |a_{23}|$, a matriz de coeficientes não é estritamente dominante.
- Como $\max_{1 \leq i \leq 3} \sum_{j=1, j \neq i}^3 |a_{ij}^*| = \max\{0.4, 1.0, 1.0\} = 1.0 \not< 1$, o critério das linhas também não é satisfeito.
- Vamos, então, verificar se o Critério de Sassenfeld é satisfeito.

A matriz de coeficientes é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dividindo cada linha pelo elemento da diagonal, temos

$$A^* = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.20 & 0.20 \\ 0.75 & 1.00 & 0.25 \\ 0.50 & 0.50 & 1.00 \end{pmatrix}.$$

Lembrando que

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}^*| \beta_j + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}^*|,$$

temos

$$\beta_1 = |a_{12}^*| + |a_{13}^*| = 0.20 + 0.20 = 0.40,$$

$$\beta_2 = |a_{21}^*| \beta_1 + |a_{23}^*| = 0.75(0.40) + 0.25 = 0.55,$$

$$\beta_3 = |a_{31}^*| \beta_1 + |a_{32}^*| \beta_2 = 0.50(0.40) + 0.50(0.55) = 0.475.$$

Assim,

$$\max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = \max\{0.40, 0.55, 0.475\} = 0.55 < 1.0.$$

Logo, segundo o Critério de Sassenfeld, o Método Gauss-Seidel converge.

Exemplo

Vamos, então, aplicar o Método Gauss-Seidel:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.20x_2^k - 0.20x_3^k + 1.00, \\ x_2^{(k+1)} = -0.75x_1^{(k+1)} + 0.25x_3^k + 1.50, \\ x_3^{(k+1)} = -0.50x_1^{(k+1)} - 0.50x_2^{(k+1)} + 0.00. \end{cases}$$

A partir de $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, temos

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.20(0.00) - 0.20(0.00) + 1.00 = 1.000, \\ x_2^{(k+1)} = -0.75(1.00) + 0.25(0.00) + 1.50 = 0.750, \\ x_3^{(k+1)} = -0.50(1.00) - 0.50(0.75) + 0.00 = -0.875. \end{cases}$$

Exemplo

Calculando o erro:

$$E_{abs} = \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_{\infty} = 1.000 > 10^{-2}.$$

$$E_{rel} = \frac{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_{\infty}}{\|x^{(1)}\|_{\infty}} = \frac{1.000}{1.000} = 1.000 > 10^{-2}.$$

Exemplo

Como o erro não foi satisfeito, continuamos o processo iterativo:

k	0	1	2	3	4
$x_1^{(k)}$	0.0000	1.0000	1.0250	1.0513	1.0532
$x_2^{(k)}$	0.0000	0.7500	0.5125	0.5194	0.5138
$x_3^{(k)}$	0.0000	-0.8750	-0.7688	-0.7853	-0.7835
E_{abs}	-	1.0000	0.2375	0.0263	0.0056
E_{rel}	-	1.0000	0.2317	0.0250	0.0053

Como

$$E_{rel} = \frac{\|x^{(4)} - x^{(3)}\|_{\infty}}{\|x^{(4)}\|_{\infty}} = \frac{0.0056}{1.0532} \simeq 0.0053 < 10^{-2},$$

paramos o processo iterativo e devolvemos $x^{(4)}$ como solução aproximada do sistema.